مقدمة في نظرية الزمر

Introduction to Group Theory



الأستاذ الدكتور
علي حسن التميمي

مقدمة في
نظرية الزمر

Introduction to Group Theory






mohamed khatab


دار
المسيرة
للنشر والتوزيع والطباعة



مقدمة في
نظرية الزمر

Introduction to Group Theory

رقـــــم التصـــنيف : 512.94

المؤلف ومن هو في حكمه : علي حسن التميمي

عنــــوان الكـــتاب : مقدمة في نظرية الزمر

رقــــم الإيــــداع : 2011/7/2364

الـــواصــــفـــات : نظرية الزمر/ الرياضيات المالية

بـــيانـــات الـــنشــر : عمان - دار المسيرة للنشر والتوزيع

تم إعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

الطبعة الأولى 2012م – 1433هـ



عنوان الدار

الرئيسي : عمان - العبدلي - مقابل البنك العربي هاتف : 5627049 6 962+ فاكس : 5627059 6 962+

الفرع : عمان - ساحة المسجد الحسيني - سوق البتراء هاتف : 4640950 6 962+ فاكس : 4617640 6 962+

صندوق بريد 7218 عمان - 11118 الأردن

E-mail: info@massira.jo . Website: www.massira.jo

مقدمة في نظرية الزّمر

Introduction to Group Theory

الأستاذ الدكتور
علي حسن التميمي



الإهداء

إلى أحفادي...

عزت الله، تارة، مجد وهيثم

الفهرس

الفصل الأول

مفاهيم عامة

الفصل الثاني

الزمر الجزئية

الفصل الثالث

الزمر السوية

الفصل الرابع

التشاكلات

الفصل الخامس

زمرة الترتيبات

الفصل السادس

مبرهنات سيلو



المقدمة

كان الجبر الحديث ولا يزال واحداً من أهم مواضيع الرياضيات الأساسية وتعد نظرية الزمر أحد فروع الجبر الحديث المهمة ليس لطلبة الرياضيات حسب وإنما للتخصصات العلمية الأخرى كالفيزياء والكيمياء وغيرها، وازدادت تلك الأهمية خصوصاً بعد ستينيات القرن العشرين نظراً لتوسع استخداماتها العلمية.

لقد جاء تأليف هذا الكتاب، الذي يعد منهجياً لطلبة الصفوف الثالثة والرابعة في كليات التربية والعلوم ومساعداً لطلبة الفيزياء والكيمياء الذين يدرسون تطبيقات نظرية الزمر ويعتبر مصدراً لا غنىً عنه لطلبة الدراسات العليا في الرياضيات، حصيلة خبرة وتجربة طويلة في تدريس هذا الموضوع.

لقد أخذت بنظر الاعتبار ضرورة تسهيل وتبسيط الأفكار الواردة فيه من خلال طرح هذه الأفكار بشكل مسهب ومتسلسل وإعطاء أمثلة متنوعة وأسئلة كذلك وعدد كبير من المبرهنات والنتائج.

يتألف هذا الكتاب من ستة فصول، يعد الفصل الأول مقدمة للزمرة وهو يحتوي على أمثلة كثيرة وكل مثال منها يمثل اتجاهاً مهماً في الزمر يختلف في دراسته عن المثال الآخر. والفصل الثاني سنسلط فيه الضوء على الزمر الجزئية أما الفصل الثالث فيبحث في نوع من الزمر المهمة هي الزمر السوية، الفصل الرابع يتضمن التشاكلات الزمرية ومبرهناتها الأساسية. أما زمر الترتيبات فقد تمت دراستها في الفصل الخامس. واخيراً تضمن الفصل السادس دراسة الزمر السيلوفية من النمط -p, p عدد أولي.

ولا يسعني في هذه المقدمة الموجزة إلا أن أشكر الابن العزيز زياد طارق عبد الأمير على جهوده القيمة بإدخال التصحيحات اللازمة في النسخة النهائية للكتاب، كما واشكر كلية العلوم وجامعة صنعاء والعاملين فيهما على حسن رعايتهم وترحيبهم.

أخيراً، آمل أن نكون قد وفقنا في تقديم هذا الجهد المتواضع لطلبتنا الأعزاء وزملائي أعضاء الهيئة التدريسية والمكتبة العربية.

والله الموفق

المؤلف

الفصل الأول

مفاهيم عامة

الفصل الأول

مفاهيم عامة

يهدف هذا الفصل إلى دراسة المفاهيم الأساسية لواحدة من المواضيع المهمة في الجبر الحديث، هي نظرية الزمر.

تعريف(1-1)

المجموعة غير الخالية G مع عملية ثنائية (*) معرفة عليها تسمى زمرة، إذا تحققت الشروط التالية:

1. لكل $x, y \in G$ فإن $x*y=z$ حيث $z \in G$ (هذا الشرط يسمى شرط الانغلاق).
2. لكل $x, y, z \in G$ فإن $(x*y)*z = x*(y*z)$. (هذا الشرط يسمى شرط التجميع).
3. يوجد في G عنصر يسمى العنصر المحايد، يرمز له e أو 1، بحيث يتحقق الشرط التالي:

   لكل $x \in G$، فإن $x*1=1*x=x$.
4. لكل $x \in G$ يوجد عنصر x^{-1} في G بحيث:

   $x*x^{-1}=x^{-1}*x=1$ (هذا الشرط يسمى شرط الانعكاس).

ملاحظات

أ. أحياناً تكتب الزمرة G مع العملية (*) المعرفة عليها بالشكل (G, *) خلال هذا الكتاب ستكتب G بدلاً من (G, *).

ب. إذا كانت العملية هي عملية جمع فإننا سنكتب (+) بدلاً من (*). أما إذا كانت العملية هي عملية ضرب فإننا سنكتب (.) بدلاً من (*) وللبساطة نكتب xy بدلاً من $x.y$.

ج. إذا كانت العملية الثنائية هي جمع نرمز للعنصر المحايد بالرمز O وللمعكوس بالرمز $(-x)$ لكل $x \in G$. أما إذا كانت العملية الثنائية هي ضرب فإننا نرمز للعنصر المحايد بالرمز1 وللمعكوس بالرمز x^{-1}.

د. خلال هذا الكتاب سنستخدم العملية الثنائية من جهة اليمين.

مثال (1)

مجموعة الأعداد الصحيحة Z مع عملية الجمع تكوّن زمرة لأنها تحقق شروط الزمرة، لكن Z مع عملية الضرب ليست زمرة وذلك لأن شرط المعكوس لا يتحقق. برهن ذلك.

1-1 زمرة البواقي

لتكن $G = Z$ مجموعة الأعداد الصحيحة. نختار أي عدد منتهي مثل $m > 1$ حيث $m \in Z$ يقال للعددين xوy في G بأنهما متطابقان قياس m إذا تحققت العلاقة التالية:

$m|(x-y)$ وتقرأ m تقسم الفرق بين العددين xوy بمعنى آخر، $x - y = mk$ حيث $k \in Z$.

أو

$$x = y + mk \ldots\ldots (1)$$

نرمز لعلاقة التطابق بالشكل التالي:

$x \equiv y \, (\text{modulus } m)$

وللسهولة تكتب

$x \equiv y \, (m)$ ....(2)

وتقرأ x يطابق y قياس m.

ملاحظة

علاقة التطابق هي علاقة تكافؤية لأنها تحقق الشروط الثلاثة انعكاسية وتناظرية وانتقالية.

1. **الانعكاس:** كل عنصر x في G يطابق نفسه أي يجب أن نبرهن $x \equiv x \, (m)$.

بمعنى آخر: $o \equiv mk$

وبما أن العلاقة أعلاه هي صحيحة عندما $k = o$ وبما أن $o \in Z$ فإن $x \equiv x \, (m)$

2. **التناظر:** إذا كانت $x \equiv y \, (m)$ فإن $y \equiv x \, (m)$.

بما أن $x \equiv y \, (m)$ بالفرض.

فإن $x - y = mk_1$ حيث $k \in z$

نضرب طرفي العلاقة في (-1) لنحصل على (لأن جميع الرموز هي أعداد صحيحة في Z) $y - x = m(-k_1)$.

أي: $y - x = mk_2$ حيث $k_2 = -k_1 \in Z$.

بمعنى آخر: $m \mid y - x$

ومن هذا نستنتج أن $y \equiv x \, (m)$.

3. **انتقالية:** إذا كان $x \equiv y \, (m)$ و $y \equiv z \, (m)$ فإن $x \equiv z \, (m)$.

بما أن $x \equiv y\ (m)$ فإن $x = y + mk'$ (بالفرض)

و $y \equiv z\ (m)$ فإن $x = y + mk''$ (بالفرض).

إذن بالتعويض: $x = y + mk' = z + mk'' + mk'$

$x = z + m(k'' + k')$

$x = z + mk_3$ (حيث $k_3 = k'' + k'$ و $k_3 \in Z$)

عليه:

$x = z + mk_3$ أو $x - z = mk_3$

إذن: $x \equiv z\ (m)$

لما كانت علاقة التطابق تحقق الشروط الثلاث فإنها تسمى علاقة تكافؤية وعند تشغيلها على Z فإنها ستوزع الأعداد في Z السالبة والموجبة إلى صفوف تسمى صفوف التطابق.

ولتوضيح ذلك نأخذ $m = 2$، إذن 0 يطابق نفسه قياس 2 وذلك لأن $0 - 0 = 2k$ وعند اختيار $k = 0$ فإن الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر. أي أن $0 \equiv 0\ (2)$. أما العدد 1 فيطابق نفسه لأن $1 - 1 = 2k_1$ وهذه صحيحة عندما $k = 0$. لاحظ أن الواحد لا يطابق الصفر لأن $1 - 0 = 2k_1$ لا يتحقق لكل قيم k_1 في Z. العدد 2 يطابق الصفر ولا يطابق 1.

خلاصة القول فإن علاقة التطابق عندما تعمل على Z فإنها ستوزع الأعداد في Z إلى صفين، الصف الأول يتضمن الأعداد الزوجية السالبة والموجبة التي تطابق العدد (0) أما الصف الثاني الذي يحوي على الأعداد الفردية السالبة والموجبة فيطابق العدد (1) أي أننا حصلنا على المجموعة $\{[0],[1]\}$ وفي بعض الأحيان نكتبها $\{\bar{0},\bar{1}\}$ وللسهولة سنرمز لهذه المجموعة بالرمز $Z_2 = \{0,1\}$.

هذه المجموعة Z_2 تشكل زمرة تحت عملية الجمع لأنها تحقق شروط الزمرة الأربعة. حيث أن الانغلاق متحقق لأن $1+1=2\equiv0(2)$، وهكذا الأعداد الأخرى، وكذلك شرط التجميع. أما العنصر المحايد فهو 0. وأخيراً معكوس 1 هو نفسه لأن $1+1=2\equiv0$.

إذن Z_2 زمرة عدد عناصرها 2 وتسمى زمرة البواقي التي عدد عناصرها 2.

نفرض $m=3$، باعتماد نفس الأسلوب كما في $m=2$ سنحصل على الصفوف التالية:

الصف 0 والأعداد المتطابقة معه هي 3 ,6 ,9 ,... ,-3 ,-6 ,-9 ,...

الصف 1 والأعداد المتطابقة معه هي 4 ,7 ,10 ,... ,-5 ,-8 ,...

الصف 2 والأعداد المتطابقة معه هي 2 ,5 ,8 ,... ,-4 ,-7 ,...

إذن مجموعة البواقي التي نحصل عليها عندما $m=3$ هي

$$Z_3=\{0,1,2\}$$

هذه المجموعة تشكل زمرة لأنها تحقق شروط الزمرة وهي:

1. الانغلاق: $1+3=4\equiv1(3)$ والعدد $1\in Z$

$3+3=6\equiv0(3)$ والعدد $0\in Z$

وهكذا بقية العناصر.

2. العنصر المحايد هو 0 (حقق ذلك).

3. المعكوس: معكوس 1 هو العدد 2 ومعكوس 3 هو 1 لأن:

$$1+2=2+1=3\equiv0\,(3)$$

إذن: Z_3 زمرة.

بصورة عامة إذا كان العدد الثابت $m>1$ عدد منتهي فإن صفوف البواقي هي:

$Z_m = \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ ....(3)

ولإثبات Z_m زمرة يجب أن تحقق الشروط الأربعة للزمرة وهي:

1. الانغلاق: بما أن جمع أي عنصرين (عددين) في Z_m هو عنصر في Z_m، لذا فإن شرط الانغلاق متحقق.

2. التجميع: متحقق (ما هو السبب).

3. العنصر المحايد هو 0 لأنه يحقق العلاقة لكل $x \in Z_m$ فإن $x+0=0+x=x$ ،

4. المعكوس: العنصر 1 معكوسة $m-1$ لأن:

$$(m-1)+1 = m-1+1 = m \equiv 0\ (m)$$

ومعكوس 2 هو $m-2$ لأن:

$$(m-2)+2-m \equiv 0\ (m)$$

وهكذا بقية العناصر.

إذن: Z_m زمرة تسمى زمرة البواقي.

1-2 زمرة المصفوفات General linear Group

نفترض M_{2x2} مجموعة جميع المصفوفات سعة 2×2 عناصرها 0 أو 1 ومحددها يساوي 1، بأخذ هذه الشروط بنظر الاعتبار فإن

$$M_{2x2} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

برهن: لا يوجد أي احتمال آخر يحقق الشروط.

المجموعة M_{2x2} تشكل زمرة تحت عملية الضرب لأن:

1. الانغلاق:

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in M_{2x2}$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in M_{2x2}$$

وهكذا بقية المصفوفات إذن شرط الانغلاق متحقق.

■. التجميع متحقق (السبب؟).

3. العنصر المحايد هو $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ لأن:

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

وهكذا بقية العناصر.

إذن شرط المحايد متحقق.

4. المعكوس:

تمرين

برهن أن العناصر $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ كل منها معكوس نفسه أما العناصر $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ فكل منها معكوس الآخر.

إذن $M_{2\times2}$ هي زمرة هذه الزمر تسمى الزمرة الخطية العامة ذي البعد 2 على حقل عناصره صفر وواحد، وتكتب بالرمز:

$$GL\,(2,2)$$

البعد (سعة المصفوفة)

عدد عناصر الحقل

وبصورة عامة إذا كان بعد المصفوفة n وعدد عناصر الحقل هو q فإن الزمرة الخطية العامة تكتب:

$$GL\,(n,q)$$

البعد (سعة المصفوفة $n\times n$)

عدد عناصر الحقل المنتهي

ملاحظة

عند تثبيت q وتغير n سنحصل على الزمر التالية:

$$\dots,\quad GL=(4,q)\,,\quad GL\,(3,q)\,,\quad GL\,(2,q)$$

وعند تثبيت n وتغيير q فإننا سنحصل على عدد كبير من الزمر مثلاً:

$$\dots,\quad GL\,(2,2^3),\quad GL\,(2,2^2),\quad GL\,(2,2)$$
$$\dots,\quad GL\,(2,3^3),\quad GL\,(2,3^2),\quad GL\,(2,3)$$
$$\dots,\quad GL\,(2,5^3),\quad GL\,(2,5^2),\quad GL\,(2,5)$$

وهكذا.

ملاحظة

عدد عناصر الحقل المنتهي هو $q=P^m$ حيث p عدد أولي (سنتطرق لموضوع الحقول في المرحلة الرابعة عند دراسة نظرية الحلقات).



تمرين

ادرس الزمرة $GL\,(3,2)$

1-3 زمرة التناظر Symmetric Group

لتكون $X=\{1,2,...,n\}$ مجموعة منتهية من الأعداد الصحيحة الموجبة. الترتيبة (permutation) التي تعمل على X وتعيد ترتيب أعدادها (عناصرها) هي دالة f معرفة بالشكل $f:X\rightarrow X$ حيث f متباينة وشاملة.

لنفرض $X=\{1,2,3\}$، عليه فإن مجموعة الترتيبات التي تؤثر على X هي:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}$$

ولا يوجد أي احتمال آخر، نرمز لهذه المجموعة بالرمز S_3 وتسمى مجموعة الترتيبات التي تؤثر على ثلاث أعداد.

إذن S_3 زمرة لأنها تحقق شروط الزمرة.

1. الانغلاق:

لتكن $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&1&3\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&3&1\end{pmatrix}$

إذن:

$$fg=\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&3&1\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\longleftarrow\text{ تأثير } g\\ \\ \longleftarrow\text{ تأثير } f\end{matrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&3&2\end{pmatrix}\in S_3$$

(لاحظ أن عملية الانغلاق من جهة اليمين، أي أننا نطبق g أولاً على $\{1,2,3\}$ ومن ثم نطبق f على صورة g.

أي أن العدد 1 ينتقل بتأثير g إلى 2 و2 تنتقل بواسطة f إلى 1 أما العدد 2 فينتقل بتأثير g إلى 3 و3 تنتقل بتأثير f إلى 3. وأخيراً العدد 3 ينتقل إلى 1 بتأثير g و1 ينتقل إلى 2 بتأثير f.

كذلك إذا كانت $x=\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&3&2\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\3&2&1\end{pmatrix}$

إذن

$$xy=\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\3&2&1\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\leftarrow y\text{ صورة}\\\\\leftarrow x\text{ صورة}\end{matrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&3&1\end{pmatrix}\in S_3 \quad \leftarrow xy\text{ صورة}$$

وهكذا بنفس الأسلوب نوجد بقية الترتيبات. إذن شرط الانغلاق متحقق.

2. التجميع: (برهن أن التجميع متحقق).

3. العنصر المحايد هو $\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&2&3\end{pmatrix}$ لأن

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\3&2&1\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\\3&2&1\end{pmatrix}$$

4. **المعكوس:** الترتيبات $\begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&3&2\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&2&1\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&1&3\end{pmatrix}$ كل منهما معكوس نفسه. أما الترتيبات $\begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&1&2\end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&3&1\end{pmatrix}$ كل منهما معكوس الآخر.

تمرين

برهن ذلك.

$\therefore$ S_3 تكون زمرة تسمى زمرة التناظر من الدرجة 3.

من الممكن تبسيط كتابة الترتيبات على النحو التالي

$1 = (1)(2)(3) = \begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&2&3\end{pmatrix}$ أي أن جميع الأعداد ثابتة.

$(2\,3) = \begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&3&1\end{pmatrix}$ أي أن 1 يثبت (لا يظهر) وأن 2 تنتقل إلى 3 و3 تنتقل إلى 2.

$(1\,3) = \begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&2&1\end{pmatrix}$ أي أن 1 ينتقل إلى 3 و3 تنتقل إلى 1 و2 تثبت.

وهكذا بقية العناصر:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&1&2\end{pmatrix} = (1\,3\,2),\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&3&1\end{pmatrix} = (1\,2\,3),\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&1&3\end{pmatrix} = (1\,2)$$

إذن S_3 يمكن كتابتها بالشكل:

$$S_3 = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

ملاحظة

شرط الانغلاق من الممكن إجراؤه بالطريقة المبسطة التالية:

1. نكتب ضرب العنصرين ونفتح قوس بعد المساوات ونضع 1 بعد القوس، أي:

$(12)(132) = (1$

2. نوجد تأثير (132) على الواحد ومن ثم نوجد تأثير (12) على صورة $(1\ 3\ 2)$، فنجد أن $1 \xrightarrow{(132)} 3 \xrightarrow{(12)} 3$ عليه فإن 1 ينتقل إلى 3.

أي:

$(12)(132) = (13$

3. نعيد الخطوة السابقة على العدد 3 فنجد أن 3 تنتقل إلى العدد 2 بتأثير $(1\ 3\ 2)$ و2 تنتقل إلى 1 بتأثير (12). أي أن $3 \xrightarrow{(132)} 2 \xrightarrow{(12)} 1$.

إذن: $(12)(132) = (13)$

لذا فإن حاصل ضرب الترتيبتين $(1\ 3\ 2)$ و(12) هو الترتيب (13) حيث العدد 2 لا يظهر لأنه ثابت تحت تأثير $(132)\ (12)$.

نأخذ حاصل الضرب $(123)\ (23)$ ونطبق الخطوات أعلاه

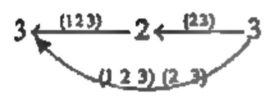
$(123)(23) = (12$

حيث أن $1 \xrightarrow{(23)} 1 \xrightarrow{(123)} 2$، إذن 1 ينتقل إلى 2 بتأثير $(23)(123)$.

بعد ذلك نوجد تأثير $(123)(23)$ على العدد 2، أي:

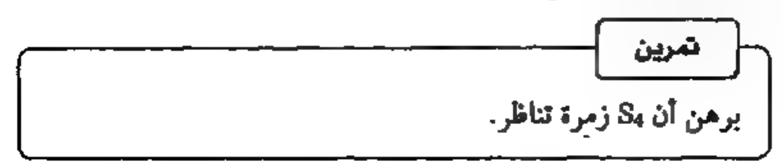
$2 \xrightarrow{(23)} 3 \xrightarrow{(123)} 1$، إذن 2 تنتقل إلى 1.

عليه فإن $(123)(23) = (12)$. أما العدد 3 فهو ثابت لأن:



وهكذا بقية الترتيبات.

وأخيراً إذا كانت $X = \{1, 2, ..., n\}$ فإن زمرة التناظر التي تعمل على X تكتب S_n وتسمى زمرة التناظر ذي الدرجة n.



تمرين

برهن أن S_4 زمرة تناظر.

1-4 الزمرة الدورية Cyclic Group

لتكن: $C \equiv \{x^0, x, x^{-1}, x^2, ..., x^n, x^{-n}, ...\}$ مجموعة تحتوي على عدد غير منتهي من العناصر معرفة عليها العملية $x^r . x^s = x^{r+s}$ حيث $r, s = 0, \mp 1, \mp 2, ...$.

عليه فإن C زمرة لا نهائية.

نختار المجموعة:

$$C_m \equiv \{1, x, x^2, ..., x^{m-1}\}$$

مع نفس العملية المعرفة على C بحيث $x^m = 1$ لذا فإن C_m زمرة تسمى الزمرة الدورية وذلك لأن:

1. الانغلاق: لتكن $x^2 x^3 \in C_m$ فإن $x^2 x^3 = x^5 \in C_m$ وهكذا بقية العناصر.

2. التجميع: متحقق (برهن ذلك؟).

3. العنصر المحايد هو $x^0=1$ لأن

$x^4 \cdot x^0 = x^{4+0} = x^4$ أو $x^4.1=1.x^4=x^4$ حيث $x^4 \in C_m$ وهكذا بقية العناصر.

4. الانعكاس: خذ $x^2 \in C_m$ عليه فإن معكوسه هو x^{m-2} لأن $x^2.x^{m-2}=x^m=1$.

وهكذا بقية العناصر.

إذن: C_m هي زمرة تسمى الزمرة الدورية Cyclic Group.

تعريف (1-2)

يقال للعنصرين $x,y \in G$ بأنهما متبادلين إذا تحقق الشرط التالي

$$xy = yx$$

تعريف (1-3)

يقال للزمرة G بأنها أبيلية إذا تحقق الشرط التالي

لكل $x,y \in G$ فإنه $xy = yx$.

مثال (2)

S_3 زمرة غير أبيلية لأن جميع عناصرها لا تتبادل مع بعضها. خذ مثلاً $y=(2\,3), x=(1\,3)$ إذن $xy=(1\,3)\,(2\,3)=(1\,3\,2)$.

بينما $yx=(2\,3)\,(1\,3)=(1\,2\,3)$ عليه $xy \neq yx$.

مثال (3)

الزمرة الدورية أبيلية لأن جميع عناصرها متبادلة، مثلاً: $x^2.x^3=x^3x^2=x^5$.

مبرهنة (1-4):

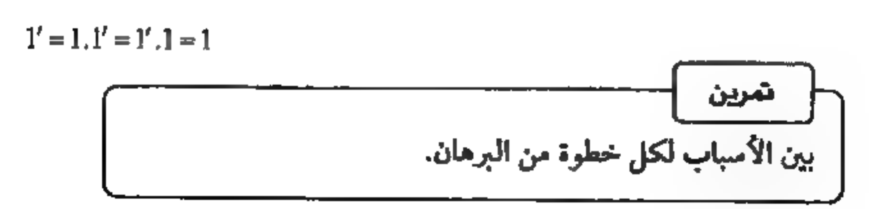
لتكن G زمرة فإن

1. العنصر المحايد $1 \in G$ يكون وحيداً.
2. لكل $x \in G$ يوجد معكوس وحيد.

البرهان:

1. نفرض وجود عنصرين محايدين مثل 1 و $1'$ في الزمرة G، إذن

$$1' = 1.1' = 1'.1 = 1$$



عليه فإن: $1' = 1$.

2. نفرض $x \in G$ و x_1, x_2 معكوسين للعنصر x في G.

إذن:

$$x_2 = x_2.1 = x_2(x\,x_1) = (x_2\,x)\,x_1 = 1.\,x_1 = x_1$$

تمرين

اكتب سبب كل خطوة من الخطوات أعلاه.

تعريف (1-5)

لتكن G زمرة فإن رتبة G (تكتب $|G|$) تعرف بأنها عدد عناصر G.

مثال (4)

رتبة S_3 تساوي 6 (أي $|S_3| = 6$).

تعريف (1-6)

ليكن $x \in G$ فإن رتبة x تعرف بأنها العدد الموجب m بحيث $x^m = 1$ (m عدد مرات ضرب x).

مثال (5)

لتكن $G = S_3$, $x = (1\ 2)$ فإن رتبة x هي 2 لأن $x^2 = x.x = (12)(12) = 1$
وكذلك إذا $x = (1\ 2\ 3)$ فإن رتبة x هي 3 لأن.

$$x^3 = x.x.x = (123)(123)(123) = (132)(123) = 1$$

مبرهنة (1-7):

لتكن G زمرة فإن لكل $x, y, z \in G$

1. $(x^{-1})^{-1} = x$.
2. $(x\,y)^{-1} = y^{-1}\,x^{-1}$.
3. إذا كان $x, y, z \in G$ و $x\,y = x\,z$ فإن $y = z$.

البرهان:

1. بما أن $x\,x^{-1} = x^{-1}\,x = 1$ (تعريف المعكوس). فإن x هو معكوس x^{-1}. لكن $(x^{-1})^{-1}$ هو المعكوس الوحيد للعنصر x^{-1} لذا فإن:

$$(x^{-1})^{-1} = x$$

2. لدينا:

$$(xy)(y^{-1}\,x^{-1}) = \big((xy)\,y^{-1}\big)x^{-1} = \big(x\,(yy^{-1})\big)x^{-1} = (x.1)\,x^{-1} = xx^{-1} = 1$$

وبنفس الطريقة: $(y^{-1}x^{-1})(x\,y)=1$.

إذن: $(x\,y)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$.

3. بما أن $xy=xz$ فإن:

$x^{-1}(x\,y)=x^{-1}(x\,z)$ (بالضرب من جهة اليسار بـ(x^{-1}))

$(x^{-1}x)\,y=(x^{-1}x)\,z$ (التجميع)

$1.y=1.z$ (المعكوس)

إذن: $y=z$

ملاحظة

من خاصية التجميع يمكننا التعميم للحالة العامة باستخدام الاستقراء الرياضي.

نفرض $x_1\,x_2,\dots,x_n\in G$

و

$$x_1x_2\dots x_r=(x_1\,x_2\dots x_s)(x_{s+1}\dots x_r) \qquad (1<s<r<n)$$

بقي لنا أن نبرهن أن:

$$(x_1\,x_2\dots x_r)(x_{r+1}\dots x_n)=(x_1\dots x_s)(x_{s+1}\dots x_n)$$

(والتي تعني أن الطرفين متساويين بغض لنظر عن وضع الأقواس). الطرف الأيسر يمكن كتابته:

$$[(x_1x_2\dots x_s)(x_{s+1}\dots x_r)](x_{r+1}\dots x_n)=[y_1y_2]\,y_3$$

حيث y_1، y_2، y_3 هما ضرب الأقواس على التوالي.

أما الطرف الأيمن: $(x_1x_2\dots x_s)[(x_{s+1}\dots x_r)(x_{r+1}\dots x_n)]=y_1[y_2y_3]$

أي أن: $[y_1\,y_2]\,y_3=y_1\,(y_2\,y_3)$ (خاصية التجميع).

عليه بالإمكان حذف الأقواس جميعاً واستعمال الصيغة

$x_1\ x_2 ... x_n$ ....(4)

لذا يمكننا الحصول على الصيغ:

$$x^m . x^n = x^n\ x^m = x^{m+n}$$

و

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

حيث m و n أعداد موجبة

فإذا كانت العناصر x و y في G ليست متبادلة فإن

$$(x\ y)^n \neq (x^n\ y^n)$$

بينما إذا كانت x و y متبادلة فإن

$$(x\ y)^n = xy\ .\ xy ... x\ y = x^n\ y^n$$

وأن:

$$x^m . y^n = y^n\ x^m$$

تمرين

هل أن $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n = x^{-n}$

تمارين محلولة

1. لتكن G زمرة، فإن لكل $x,y,z \in G$

أ. $xy = xz$ يعطينا $y = z$.

ب. $yx = zx$ يعطينا $y = z$

ملاحظة:

الخاصيتان أ و ب يقال لهما قانون الاختصار من اليسار واليمين على التوالي:

البرهان:

أ. بما أن $xy = xz$ بالفرض و $x^{-1} \in G$ فإن

$x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz)$ (بالضرب في x^{-1})

$(x^{-1}x)y = (x^{-1}x)z$ (التجميع)

$1y = 1z$ (المعكوس)

إذن $y = z$

ب. لما كانت $xy = zx$ بالفرض و $x^{-1} \in G$ فإن

$$(yx)x^{-1} = (zx)x^{-1}$$
$$y(xx^{-1}) = z(xx^{-1})$$
$$y1 = z1$$

إذن $y = z$

2. إذا كانت G زمرة و $|G| = 2$ فإن G تتكون من عنصرين فقط.

البرهان:

بما أن G زمرة رتبتها 2 فإن أحد عناصرها هو 1 (العنصر الحايد) والآخر هو العنصر x حيث $x \neq 1$ ، أي أن $G = \{1, x\}$.

بعمل جدول ضرب العناصر للزمرة G سنحصل على :

$1.1 = 1$ أو $1.x = x$ أو $x.1 = x$

لما كان $x \in G$ فإن $x.x \in G$.

إذن أما $xx = 1$ أو $x.x = x$

إذا كان $xx = x$ فان $xx = x.1 = x$ وهذا يعني أن $x = 1$ وهذا تناقض.

عليه فإن $x.x = 1$.

3. لتكن G زمرة منتهية فان المعادلات:

$ax = b$ و $ya = b$ لهما حلول وحيدة في G حيث $x, y \in G$.

البرهان: نعوض $x = a^{-1}b$ في المعادلة الاولى سنحصل على:

$$a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b$$
$$= 1b$$
$$= b$$

اما المعادلة الثانية فنعوض $y = ba^{-1}$ فيها وسنحصل على:

$$(ba^{-1})a = b(a^{-1}a)$$
$$= b1$$
$$= b$$

لاحظ أن x و y لهما حلول وحيدة هما $x = a^{-1}b$ و $y = ba^{-1}$.

4. مجموعة جميع المصفوفات الحقيقية $M_{2\times2}$ من النوع $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ حيث $a \neq 0$، تكون زمرة ضربية.

البرهان:

لتكن $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix}$ عنصران في المجموعة $M_{2\times2}$:

فإن :

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ b_1a_2 + b_2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ b_3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times2}$$

حيث $a_3 = a_1a_2$ و $b_3 = b_1a_2 + b_2$

إذن قانون الانغلاق متحقق.

خذ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ كعنصر محايد.

وإذا كانت $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ عنصر لا على التعين في $M_{2\times2}$ فإن معكوسه هو $A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ -ba^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ لأن:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ -ba^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

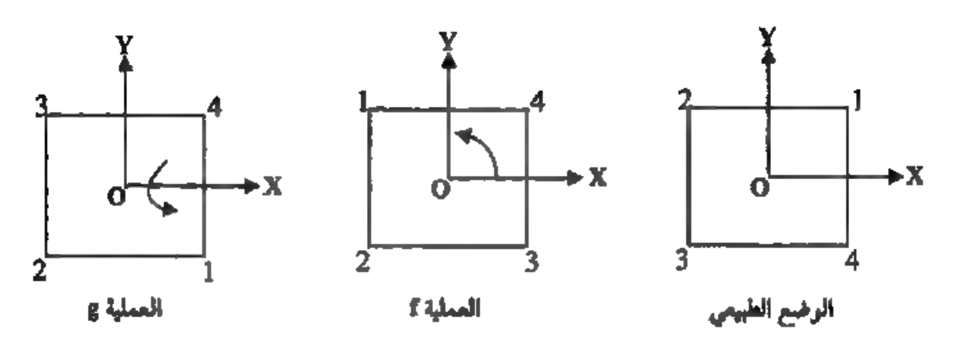
تمارين الفصل الأول

1. إذا كانت رتبة كل من العناصر b, a و ab في الزمرة المنتهية هي 2، برهن أن $ab = ba$.
2. لتكن $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ زمرة قياس 7. أوجد رتبة كل عنصر في G قياس 7. بين أن G زمرة دورية رتبتها 6.
3. برهن أن $|S_n| = n!$.
4. لتكن Z مجموعة الأعداد الصحيحة. برهن أن $(Z,+)$ زمرة ابيلية بينما $(Z, \bullet)$ لا تكوّن زمرة.
5. برهن أن الزمرة G ابيلية إذا وفقط إذا لكل $a, b \in G$ فإن $(a\,b)^{-1} = b^{-1}\,a^{-1}$.
6. إذا كانت G زمرة و $x \in G$ بحيث $x^2 = x$. برهن أن $x = 1$.
7. لتكن G زمرة تحت العملية $H, \bullet$ زمرة تحت العملية $*$. عرف العملية $\bullet$ على $G \times H$ بالشكل:

$$(g_1, h_1)\, o (g_2, h_2) = (g_1 \bullet g_2 \;\;,\;\; h_1 * h_2)$$

حيث $g_1, g_2 \in G$ و $h_1, h_2 \in H$. برهن أن $(G \times H, o)$ زمرة.

8. خذ الصفيحة المربعة الشكل المبينة في الشكل أدناه. افرض أن الصفيحة موضوعة في المستوى XY وأن OZ عمود على الصفيحة. فإذا كانت f عملية تدوير بزاوية $\frac{\pi}{2}$ وأن محور الدوران هو OZ و g هو تدوير حول المحور OX بزاوية قيمتها π. هل أن $gf = fg$.



9. نفرض G مجموعة جميع الدوال ذات القيمة الحقيقية على خط الأعداد الحقيقية مع العملية المعرفة على النحو التالي:

إذا $f, g \in G$ فإن $f+g$ هي دالة قيمتها عند أي $x \in R$ هي $f(x)+g(x)$ برهن أن G زمرة.

10. برهن أن عناصر فضاء المتجهات تكوّن زمرة تحت عملية جمع المتجهات.

11 لتكن X مجموعة ما و$P(X)$ مجموعة جميع المجاميع الجزئية من X. هل أن $P(X)$ مع العملية المعرفة عليها $A*B=A\cap B$ لكل $A,B\in P(x)$ تشكل زمرة أم لا ولماذا؟

12. هل أن Z مع العملية المعرفة عليها $a*b=a+b-1$، لكل $a,b\in Z$ زمرة أم لا. برهن ذلك؟

13. لتكن G زمرة. برهن أن G زمرة أبيلية إذا وفقط إذا $(x\,y)^{-1}=x^{-1}\,y^{-1}$، لكل $x, y \in G$.

14. نفرض Z مجموعة مع عملية * معرفة عليها بالشكل:

$x*y=x$

هل أن Z تمثل زمرة أم لا. برهن ذلك.

الفصل الثاني

الزمر الجزئية

الفصل الثاني

الزمر الجزئية

Subgroups

2-1 الزمر الجزئية

تعريف (2-1)

لتكن G زمرة و H مجموعة غير خالية في G، فإن H تسمى زمرة جزئية في G إذا كانت H هي نفسها زمرة.

ملاحظة

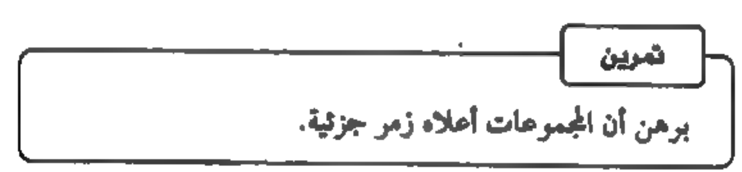
العملية الثنائية المعرفة على G هي نفسها معرفة على H.

مثال (1)

نفرض $G = S_3$

إذن S_3 تحتوي على الزمر الجزئية التالية:

$$\{1,(1\,2\,3),(1\,3\,2)\},\{1,(2\,3)\},\{1,(1\,3)\},\{1,(1\,2)\},G,\{1\}$$



الزمر الجزئية $\{1\}$, G تسمى الزمر الجزئية الواضحة، أما الزمر الجزئية الأخرى فتسمى الزمر الجزئية الفعلية.

مثال (2)

لتكن $G = Z$ ، $H = 2Z$ مجموعة جميع الأعداد الزوجية في Z فإن H زمرة جزئية في Z. (لاحظ أن $2Z = \{2z : z \in Z\}$)

مبرهنة (2-2):

لتكن G زمرة وH مجموعة جزئية غير خالية في G، فإن H زمرة جزئية إذا وفقط إذا:

1. لكل $x, y \in H$ فإن $x\,y \in H$.
2. لكل $x \in H$ فإن $x^{-1} \in H$.

البرهان:

المبرهنة ذو اتجاهين، الأول نفرض H زمرة جزئية ونبرهن أن الشرطان 1 و2 متحققان، والثاني نفرض أن الشرطان متحققان ونبرهن أن H زمرة جزئية.

نرمز لبرهان الاتجاه الأول بالسهم $\Leftarrow$ والثاني بالسهم $\Rightarrow$.

البرهان ($\Leftarrow$): نفرض أن H زمرة جزئية.

إذن H زمرة، لذا فإن لكل $x, y \in H$ نستنتج أن $x\,y \in H$ لأن H مغلقة تحت العملية الثنائية وهي الضرب في G.

لما كانت H زمرة فإنها تحتوي على العنصر المحايد 1.

بما أن H زمرة فإن أي عنصر x في H له معكوس وحيد x^{-1} في H بحيث $x^{-1}\,x = x^{-1}\,x = 1$. عليه فإن الشرطان متحققان.

البرهان العكس ($\Rightarrow$): بما أن $H \neq \phi$ لأن H مجموعة غير خالية في G فإن H تحتوي على الأقل على عنصر واحد مثل x. ولما كان $x \in H$ فإن $x^{-1} \in H$ حسب الشرط الثاني.

إذن x و x^{-1} في H وعليه فإن $x^{-1}x = 1 \in H$ من الشرط الأول.

ولما كانت $x \in H$ فإن $x.x \in H$ الشرط الأول، وهو عنصر جديد نسميه y أي $x.x = y$.

إذن: لكل $x, y \in H$ فإن $x.y \in H$.

لما كانت جميع شروط الزمرة متحققة في H فإن H زمرة ومنها H زمرة جزئية.

(برهن أن شرط التجميع متحقق).

تمرين

لتكن G زمرة وH مجموعة غير خالية، فإن H زمرة جزئية في G إذا وفقط إذا لكل $x, y \in H$ فإن $x y^{-1} \in H$

تعريف (2-3)

لتكن G زمرة فإن مركز G، يكتب $Z(G)$، يعرف كالتالي

$$Z(G) = \{z \in G: \quad \forall g \in G ; \quad zg = gz\}$$

(أي أن عناصر $Z(G)$ تتبادل مع نفسها ومع جميع عناصر G الأخرى).

مثال (3)

ليكن $G = S_3$ فإن $Z(G) = \{1\}$ لأن العنصر الوحيد في S_3 الذي يتبادل مع جميع عناصرها هو 1.

مثال (4)

مركز الزمرة الدورية C_n هو نفس الزمرة لأن C_n زمرة ابيلية أي $Z(C_n) = C_n$.

مبرهنة (4-2):

لتكن G زمرة فإن $Z(G)$ زمرة جزئية في G.

البرهان:

بالإمكان استخدام مبرهنة (2-2) لإثبات أن $Z(G)$ زمرة جزئية، لكننا سنبرهن الشروط الأربعة للزمرة. $Z(G) \neq \phi$ لأن $1 \in Z(G)$.

1. **شرط الانغلاق:**

نفرض أن $z_1, z_2 \in Z(G)$ ونبرهن أن $z_1 z_2 \in Z(G)$.

بما أن $z_1 \in Z(G)$ فإن $z_1 g = g z_1$ (بالتعريف).

وبما أن $z_2 \in Z(G)$ فإن $z_2 g - g z_2$ (بالتعريف).

إذن:

$$\begin{aligned}\forall g \in G;\ (z_1 z_2) g = z_1 (z_2 g) &= z_1 (g z_2) \\ &= (z_1 g) z_2 \\ &= (g z_1) z_2 \\ &= g (z_1 z_2)\end{aligned}$$

عليه فإن $z_1 z_2 \in Z(G)$

2. تمرين: برهن أن شرط التجميع متحقق.
3. العنصر المحايد: بما أن $1g = g1$ لكل $g \in (G)$ فإن $1 \in Z(G)$.
4. المعكوس: نفرض $z \in Z(G)$ فإن $z g = g z$.

نضرب طرفي العلاقة من اليسار بالعنصر z^{-1} وسنحصل على:

$$z^{-1}\,zg = z^{-1}\,gz$$

$$g = z^{-1}\,gz$$

وبضرب العلاقة من جهة اليمين بالعنصر z^{-1} سنحصل على:

$$g\,z^{-1} = z^{-1}\,g$$

عليه فإن $z^{-1} \in Z(G)$.

ملاحظة: $Z(G)$ زمرة ابيلية على الرغم من أن G ليست دائماً ابيلية.

تمرين

برهن الملاحظة.

تعريف (2-5)

لتكن G زمرة و $x \in G$ مركز x في G، يكتب $C_G(x)$، يعرف بالشكل التالي

$$C_G(x) = \{g \in G:\ g\,x = x\,g\}$$

أي أن المركز للعنصر x في G هي مجموعة غير خالية من عناصر G التي تتبادل مع x.

مثال (5)

نفرض $x = (12) \in S_3$ فإن:

$$C_G(x) = C_{S_3}(12) = \{1, (12)\}$$

لاحظ أن العنصر 1 يتبادل مع (12) والعنصر (12) يتبادل مع نفسه فقط.

مبرهنة (2-6):

إذا كانت G زمرة و $x \in G$ فإن $C_G(x)$ زمرة جزئية في G.

البرهان: للسهولة نكتب $C(x)$ بدلاً من الرمز $C_G(x)$.

1. $C(x)$ مجموعة غير خالية لأن $1 \in C(x)$.
2. الانغلاق: لتكن $c_1, c_2 \in C(x)$.

إذن: $c_1x = xc_1$ و $c_2x = xc_2$

عليه:

$$(c_1c_2)(x) = c_1(c_2 x) = c_1(x c_2) = (c_1 x) c_2 = (xc_1)c_2 = x (c_1c_2)$$

لذا: $(c_1c_2) \in c(x)$

3. تمرين: برهن أن شرط التجميع متحقق.
4. لما كان 1 يتبادل مع x فإن $1 \in C(x)$.
5. ليكن $c \in C(X)$ فإن $cx = xc$ (بالتعريف).

نضرب العلاقة أعلاه من جهة اليسار في c^{-1} فنحصل على:

$$c^{-1}c\,x = c^{-1}\,x\,c$$

أي: $x = c^{-1}\,x\,c$ وبالضرب في c^{-1} من جهة اليمين نحصل على:

$$xc^{-1} = c^{-1}\,x$$

عليه فإن $C(x)$ هو زمرة جزئية.

مبرهنة (2-7):

إذا كانت H وK زمرتين جزئيتين في الزمرة G، فإن تقاطعهما زمرة جزئية في G.

البرهان:

$H \cap K \neq \varphi$ لأن $1 \in H \cap K$ بسبب كون $1 \in H\;,\; 1 \in K$.

نفرض $x, y \in H \cap K$ فإن $x, y \in H\;,\; x, y \in K$.

إذن:

$x\,y \in H$ و $x\,y \in K$ لأن كل من H و K زمرة جزئية في G.

عليه $x\,y \in H \cap K$.

لتكن $x \in H \cap K$ لذا فإن $x \in H,\; x \in K$.

إذن: $x^{-1} \in H,\; x^{-1} \in K$ (لأن H و K زمر جزئية)

نستنتج من ذلك أن $x^{-1} \in H \cap K$ (لكون x^{-1} معكوس وحيد).

عليه فإن $H \cap K$ زمرة جزئية.

2-2 المجاميع المشاركة Cosets

تعريف (2-8)

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية في G، فإن المجموعة المشاركة اليمنى (اليسرى) للزمرة الجزئية H في G تكتب Hg (أو gH) وتعرف كالتالي

$$Hg = \{hg : h \in H\}$$

حيث g عنصر معين في G.

مثال (1)

نفرض $G = S_3$ و $H = \{1, (12)\}$ حيث H زمرة جزئية في S_3 . أوجد جميع المجاميع المشاركة لـ H في G.

$H.1=\{1,\ (12)\}.1=\{1,(12)\}=H$

$H(12)=\{1,(12)\}(12)=\{(12),(12)(12)\}=\{(12),1\}=\{1,(12)\}=H$

$H(13)=\{1,(12)\}(13)=\{(13),(12)(13)\}=\{(13),(132)\}=H(13)$

$H(23)=\{1,(12)\}(23)=\{(23),(12)(23)\}=\{(23),(123)\}=H(23)$

$H(123)=\{1,(12)\}(123)=\{(123),(12)(123)\}=\{(123),(23)\}=H(23)$

$H(132)=\{1,(12)\}(132)=\{(132),(12)(132)\}=\{132),(13)\}=H(13)$

لاحظ بأننا حصلنا على ثلاثة مجاميع مشاركة هي:

$H, H(13), H(23)$

أما بقية المجاميع فهي تساوي أحد المجاميع المشاركة الثلاث التي حصلنا عليها.

مثال (2)

نأخذ $G=S_3$ ، $H=\{1,(123),(132)\}$، بنفس الطريقة كما في المثال(1) فإننا سنحصل على المجاميع المشاركة

$H, H(12)$

حيث أن بقية المجاميع تساوي المجاميع التي حصلنا عليها.

من خلال الأمثلة (1) و(2) نستطيع القول بأنه إذا كان عدد عناصر H كبيراً فإننا سنحصل على عدد من المجاميع أقل مما لو كان عدد عناصر H صغيراً، بمعنى آخر، عندما كانت $H=\{1,(123),(132)\}$ فإن عدد المجاميع المشاركة اليمنى التي حصلنا عليها هو 2.

ملاحظات

1. المجاميع المشاركة اليسرى تعرف بنفس الطريقة. خلال هذا الكتاب سنتعامل مع المجاميع المشاركة اليمنى.
2. إذا كان $x \in H$ فإن $Hx=H$ (لأن H مغلقة تحت عملية الضرب).
3. أما إذا كان $x \notin H$ فإن $Hx \neq H$.

تعريف (2-9)

إذا كانت H زمرة جزئية في الزمرة G فإن عدد المجاميع المشاركة لـ H في G يسمى الدليل ويكتب $[G:H]$.

مثال (3)

إذا كانت $H=\{1,(1\,2)\}$ و $G=S_3$ فإن $[S_3:H]=3$ وعندما $H=\{1,(1\,2\,3),(1\,3\,2)\}$ فإن $[S_3:H]=2$.

مبرهنة (2-10):

أي مجموعتين مشاركتين أما متساويتين أو لا يوجد عنصر مشترك بينهما. أي إذا كانت Hg_1 , Hg_2 مجموعتين مشاركتين فإن: إما Hg_2 , $Hg_1 =$ أو $Hg_1 \cap Hg_2 = \phi$.

البرهان:

نفترض أن $Hg_1 \cap Hg_2 \neq \varphi$.

إذن يوجد عنصر مثل z بحيث $z \in Hg_1 \cap Hg_2$

عليه فإن: $z \in Hg_1$ ومن ذلك نستنتج أن $z = h_1 g_1$ حيث $h_1 \in H$.

كذلك: $z \in Hg_2$ ومن ذلك نستنتج أن $z = h_2 g_2$ حيث $h_2 \in H$.

إذن:

$$Hz = \{hz : h \in H\} = \{(h\,h_1)\,g_1 : h \in H\} = \{h' g_1 : h' \in H\} = Hg_1$$
$$Hz = \{hz : h \in H\} = \{(h\,h_2)\,g_2 : h \in H\} = \{h'' g_2 : h'' \in H\} = Hg_2$$

عليه:

$$Hg_1 = Hg_2$$

من خلال المبرهنة (2-10) وتعريف المجاميع المشاركة نستطيع القول أن عدد عناصر كل مجموعة مشاركة يساوي عدد عناصر المجموعة المشاركة الأخرى ويساوي عدد عناصر الزمرة الجزئية H. أي إذا كانت:

$G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ و H زمرة جزئية في G فإن

عدد عناصر Hg_1 = عدد عناصر Hg_2 =...= عدد عناصر Hg_n = عدد عناصر H.

إذن عناصر G ستتوزع داخل المجاميع المشاركة اليمنى. ولما كان عدد عناصر كل مجموعة مشاركة يساوي عدد عناصر H فإن:

$$|G| = n.|H|$$

n ← عدد المجاميع المشاركة.

ولما كان $n = [G:H]$ فإن:

$$|G| = [G:H] . |H|$$

مبرهنة (2-11):

لتكن H زمرة جزئية في الزمرة G، فإن رتبة H تقسم رتبة G.

البرهان:

لما كان $|G| = [G:H].|H|$

ومن خلال الملاحظات أعلاه فإن $|H|$ تقسم $|G|$.

ملاحظة

المبرهنة أعلاه تسمى مبرهنة لاكرانج

نتيجة (2-12):

رتبة أي عنصر في G تقسم رتبة G.

البرهان:

نفرض $x \in G$. بما أن رتبة G محدودة فإن رتبة x محدودة أيضاً ولتكن m (عدد موجب).

إذن $x^m = 1$ (تعريف رتبة العنصر).

أي أن $C_m = \{1, x, x^2, ..., x^{m-1}\}$ زمرة جزئية دورية في G رتبتها m. وحسب مبرهنة (2.11) فإن m تقسم رتبة G.

> **تمرين**
>
> الزمرة التي رتبتها عدد أولي p لا تحتوي في داخلها على زمرة جزئية فعلية، برهن ذلك؟

مثال (4)

رتبة $H = \{1, (12)\}$ هي 2 ورتبة S_3 هي6 لاحظ أن 2 تقسم 6.

كذلك إذا كان $x = (12)$ عنصر في S_3 فإن رتبة x هي 2 تقسم رتبة S_3.

وعندما $x = (123)$ في S_3 فإن رتبة x وهي 3 تقسم رتبة S_3.

ملاحظة:

عكس مبرهنة لاكرانج غير صحيح، لأن 6 تقسم 12. ولكن لا توجد زمرة جزئية رتبتها 6 في الزمرة التي رتبتها 12.

> **تمرين**
>
> هل تستطيع برهان ذلك؟

مبرهنة (2-13):

لتكن G زمرة وH زمرة جزئية في G، فإن $Hx = Hy$ إذا وفقط إذا $xy^{-1} \in H$، حيث $x, y \in G$.

البرهان: $\Leftarrow$ نفرض $Hx = Hy$

إذن $x = 1.x \in Hy$ (لأن $1 \in H$ و $Hx = Hy$)

لذا يوجد عنصر $h \in H$ بحيث $x=hy$

أو $x y^{-1} = h \in H$ (بضرب طرفي العلاقة أعلاه في y^{-1})

ومن هذا $x y^{-1} \in H$

$\Rightarrow$ نفرض $x y^{-1} \in H$

إذن: $Hx = Hhy = Hy$

مبرهنة (2-14):

لتكن H زمرة جزئية في الزمرة G. فإن المجموعة S في G تكون داخل H إذا وفقط إذا $HS = SH = H$

وكحالة خاصة: عندما $S = H$ فإن $HH = H^2 = H$

البرهان: تمرين.

مبرهنة (2-15):

إذا كانت H مجموعة محدودة في الزمرة G، فإن H زمرة جزئية إذا وفقط إذا $H^2 = H$.

البرهان:

الاتجاه ⇐ هذا الجزء من البرهان يمكن برهنته بسهولة لأن H زمرة جزئية. أي أن H زمرة باستخدام المبرهنة (2-14) ولبرهان الاتجاه ⇒ نفرض أن $H^2 = H$ ونبرهن H زمرة جزئية.

ليكن $H = \{u_1, u_2, ..., u_h\}$، لنختار عنصر في H لأعلى التعين وليكن u.

لذا فإن:

$$Hu : u_1 u, u_2 u, ..., u_h u$$

أي أن $u_1 u, u_2 u, ..., u_h u \in H^2$

وبما أن $H^2 = H$، لذا فإن $u_1 u, u_2 u, ..., u_h u \in H$. علاوة على ذلك، فإن جميع العناصر هذه غير متكررة (لأن قانون الاختصار متحقق في G).

لذا فإن $u_1, u_2, ..., u_h$ و $u_1 u, u_2 u, ..., u_h u$ متساوية (بعد الترتيب) وعلى وجه الخصوص العنصر u موجود في $u_1 u, u_2 u, ..., u_h u$.

لذا يوجد عدد i بحيث:

$$u_i u = u$$

إذن $u_i = 1 \in H$

وأخيراً يوجد k (عدد) بحيث $u_k = u^{-1} \in H$ وعليه فإن H زمرة.

تعريف (2-16)

يقال للعنصرين $x, y \in G$ بأنهما متكافئين، تكتب $x \approx y$، نسبة لـ H إذا وجد $h \in H$ بحيث $x = hy$، أو:

$$Hx = Hy$$

بمعنى آخر، إذا وقع كل من x وy في نفس المجموعة المشاركة اليمنى لـH.

هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ لأنها تحقق الشروط الثلاث: انعكاسية، تناظرية، وانتقالية.

انعكاسية: لأن $Hx = Hx$ (برهن)؟

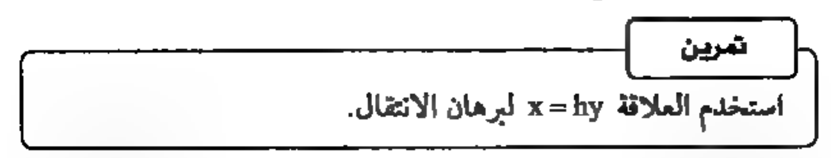
تناظرية: إذا كان $Hx = Hy$ فإن $Hy = Hx$.

بما أن $x = 1.x \in Hx$ و $Hx = Hy$ فإن $x \in Hy$ وبالعكس إذا $x \in Hy$ فإن $x \in Hx$ لكل $x \in G$.

انتقالية: إذا $Hx = Hy$ و$Hy = Hz$ فإن $Hx = Hz$.

بما أن $x \in Hy$ و $Hx = Hy$ فإن $x \in Hy$ ولكن $Hy = Hz$ فإن $x \in Hz$.

وبما أن x عنصر لا على التعين فإن $Hx = Hz$.



تمرين

استخدم العلاقة $x = hy$ لبرهان الانتقال.

إذن العلاقة أعلاه هي علاقة تكافؤ. وعندما تعمل على عناصر G نسبة لـ H فإنها ستوزعها إلى مجاميع منفصلة عن بعضها تسمى صفوف التكافؤ فإذا كانت $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$.

فإن: $G = Hg_1 \cup Hg_2 \cup ... \cup Hg_n$

وبما أن عدد العناصر في أي مجموعة مشاركة Hg_i ، $i = 1, 2, ..., n$ يساوي عدد العناصر في G، فإن:

$$|G| = \underbrace{|H| + |H| + ... + |H|}_{n=[G:H]}$$

أي: $|G| = [G:H] \cdot |H|$

3-2 المولدات والعلاقات Generators and Relations

في كثير من الحالات وخاصة عندما تكون الزمرة كبيرة فإن من الصعوبة جداً كتابة عناصر الزمرة أو التعبير عنها بشكل مجموعة. عليه فهناك صيغ بسيطة يمكن بواسطتها التعبير عن الزمر بدلالة عدد من عناصرها تسمى المولدات مع وجود عدد من العلاقات تربط بين تلك المولدات.

مثال (1)

نأخذ زمرة التناظر S_3.

$\therefore \quad S_3 = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

S_3 تحتوي على ستة عناصر (ترتيبات) ثلاث منها وهي $(12), (13), (23)$ رتبة كل منها 2. أما العنصرين $(123), (132)$ فرتبة كل منها 3.

نأخذ أحد العناصر رتبته 3 وليكن (123) (نستطيع أخذ العنصر (132)) وكذلك نأخذ أحد العناصر الذي رتبته 2 وليكن (12) مثلاً.

إذن يمكن إيجاد جميع عناصر S_3 من العنصرين $(123), (12)$ على النحو الآتي:

نفرض $x = (123), \; y = (12)$

إذن: $x = (123), \; x^2 = (132), \; x^3 = 1$

عليه فإن: $1, x, x^2 \in S_3$

لذا من العنصر x حصلنا على ثلاثة عناصر هي: $1 \;, \; x \;, \; x^2$. ومن العنصر الثاني y نحصل على $y \;, \; y^2 = 1$. أي أن $1 \;, \; y \in S_3$.

إذن العناصر التي وجدناها في S_3 هي: $1, \; x, \; x^2, \; y \in S_3$.

نأخذ حواصل ضرب العناصر أعلاه، أي x^2y و xy وهما ينتميان إلى S_3.

إذن: $1 ,\ x ,\ x^2, y,\ xy ,\ x^2y\ \in\ S_3$

بقي لـدينا ضـرب العناصـر عنـدما x مـن جهـة الـيمين أي $yx\ ,\ yx^2$ فـإذا أضيفت للعناصر الأخرى يصبح عدد العناصـر في S_3 ثمانيـة وهـذا غـير ممكـن. إذن يجب أن تكون العناصر $yx\ ,\ yx^2$ مساوية لعنصرين من عناصر S_3 التي وجدناها.

لذا:

$$yx = \begin{cases} 1 & \text{إما} \\ x & \text{أو} \\ x^2 & \text{أو} \\ y & \text{أو} \\ xy & \text{أو} \\ x^2y & \text{أو} \end{cases}$$

إذا كان $yx = 1$ فإن $y = x^{-1} = x^2$ وهذا تناقص.

أو $yx = x$ يعطينا $y = 1$ وهذا تناقص.

أو $yx \quad x^2$ يعطينا $y = x$ تناقص.

أو $yx = x$ وهذا يؤول إلى $y = 1$ تناقص.

أو $yx = xy$ وهذا غير ممكن لأن S_3 زمرة ليست ابيلية.

إذن $yx = x^2y$ وهو الاحتمال الوحيد الصحيح الباقي.

والآن:

$$\begin{aligned} y\,x^2 &= (y\,x)\,x = (x^2y)\,x = x^2\,(y\,x) \\ &= x^2\,(x^2y) = x\,x^3y = x.\,1.\,y = x\,y \end{aligned}$$

إذن $yx = x^2y$ و $yx^2 = xy$

عليه فإن:

$$S_3 = \langle \underbrace{x, y}_{\text{المولدات}} : \underbrace{x^3 = y^2 = 1, yx = x^2y}_{\text{العلاقات}} \rangle$$

أي أن S_3 يتولد من y و x بحيث تتحقق العلاقات $y^2 = 1, \ x^3 = 1$ و $yx = x^2y$.

مثال (2)

لتكن $A = \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

فإن $A^4 = 1 \ , \ A^2 = B^2 \ , \ BA = A^3B$ (تحقق من ذلك؟)

$$\therefore \quad G = \{1, A, A^2, A^3, B, AB, A^2B, A^3B\}$$

أو:

$$G = \langle \underbrace{A, B}_{\text{المولدات}} : \underbrace{A^4 = 1, A^2 = B^2, BA - A^3B}_{\text{العلاقات}} \rangle$$

G تسمى زمرة الداهيدرال.

2-4 الضرب المباشر الخارجي والضرب المباشر الداخلي

External and Internal Direct product

نناقش الآن طريقة الحصول على زمرة جديدة من زمرتين مختلفتين. لتكن H وK زمرتين معلومتين، نعرف $H \times K$ بالشكل:

$$H \times K = \{ (h,k) : h \in H, \ \ k \in K \}$$

بحيث:

$(h_1, k_1) \bullet (h_2, k_2) = (h_1 h_2, \ k_1 k_2) = (h_3, k_3)$ عمليه معرفة على عناصر $H \times K$ لكل $h_1h_2 = h_3$ و $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in k$ وكذلك $k_3 = k_1 \ k_2 \in K$.

عليه فإن $H \times K$ تكوّن زمرة لأن:

1. الانغلاق: معرف عليها.
2. التجميع: (برهن ذلك).
3. العنصر المحايد في $H \times K$ هو $(1_H, 1_K)$ لأن:

$$(h,k) \bullet (1_H, 1_K) = (h.1_H, k1_K) = (h, k)$$

و

$$(1_H, 1_K) \bullet (h,k) = (1_H.h, 1_K.K) = (h, k)$$

4. المعكوس: (h^{-1}, k^{-1}) هو معكوس (h,k) لأن:

$$(h^{-1}, k^{-1}) \bullet (h, k) = (h^{-1}h, k^{-1}k) = (1_H, 1_K)$$

$$(h, k) \bullet (h^{-1}, k^{-1}) = (h.h^{-1}, kk^{-1}) = (1_H, 1_K)$$

إذن $H \times K$ زمرة تسمى زمرة الضرب المباشر الخارجي.

وإذا كانت $|H| = n$, $|K| = m$ فإن $|H \times K| = n\,m$.

ملاحظة

بالإمكان تعميم الحالة إلى n من الزمر. فإذا كانت $H_1, H_2, ..., H_n$ أي مجموعة من الزمر فإن ضربهما المباشر هو:

$$H_1 \times H_2 \times ... \times H_n = \{(h_1, h_2, ..., h_n)\}$$

حيث $h_i \in H_i$ لكل $i = 1, 2, ..., n$

ليس من الضروري أن تكون العمليات على H_i متساوية.

في بعض الحالات تكون G مساوية لحاصل ضرب زمرتين جزئيتين فيها وتكتب $G = H \times K$ حيث H و K زمر جزئية في G. هذه الحالة تبرز عندما تتحقق الشروط الآتية:

1. عناصر H و K تتبادل مع بعضها البعض، أي إذا كان $h \in H$ و $k \in K$ فإن $hk = kh$ لكل $h \in H$ و $k \in K$.
2. كل عنصر $g \in G$ يساوي حاصل ضرب $h \in H$ و $k \in K$. أي: $g = hk$.
3. $H \cap K = \{1\}$.

الزمرة G هذه تسمى الضرب المباشر الداخلي.

مثال (1)

نفرض $G = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ مجموعة أعداد موديولو 15 (قياس 15).

عليه فإن G زمرة ضربية لأنها تحقق جميع شروط الزمرة الأربعة:

1. الانغلاق متحقق لأن

$$2\times 14 = 28 \equiv 13, \quad 2\times 13 = 26 \equiv 11, \quad 2\times 11 = 22 \equiv 7, \quad 2\times 8 = 16 \equiv 1, \quad 2\times 4 = 8$$

وهكذا ضرب أي عددين في G يساوي عدد موجود داخل G قياس 15.

2. التجميع (تمرين).
3. العنصر المحايد هو 1 (تحقق من ذلك).
4. المعكوس: معكوس 1 هو نفسه 1.

معكوس 2 هو 8 لأن $2\times 8 = 16 \equiv 1$

معكوس 4 هو نفسه 4 لأن $4\times 4 = 16 \equiv 1$

معكوس 7 هو 13 لأن $7\times 13 = 91 \equiv 1$

معكوس 8 هو 2 لأن $8\times 2 = 16 \equiv 1$

معكوس 11 هو نفسه لأن $11\times11=121\equiv1$

معكوس 13 هو العدد 7 لأن $13\times7=91\equiv1$

معكوس 14 هو معكوس نفسه لأن $14\times14=196\equiv1$

$\therefore$ G زمرة تحت الضرب.

لتكن $H=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$

إذن H زمرة جزئية تحت الضرب لأنها تحقق جميع شروط الزمرة عليه فإن H زمرة جزئية في G تتولد بواسطة العدد 2، أي:

$H=\langle 2:\ 2^4=1\rangle$ قياس 15.

خذ: $K=\{1,11\}$ (قياس 15).

أي: $K=\langle 11:\ 11^2=1\rangle$

لاحظ أن كل من H وK هي زمرة دورية وكل منهما ابيلية.

1. عناصر H و K متبادلة فمثلاً $11\times2=2\times11=22\equiv7$ وهكذا بقية العناصر. إذن الشرط الأول متحقق.

2. كل عنصر في G هو عبارة عن حاصل ضرب عنصر من H في عنصر من K. فمثلاً:

$14=4\times11=44=14$ (قياس 15).

$7=2\times11=22=7$ (قياس 15).

وهكذا بقية الأعداد في G.

إذن الشرط الثاني متحقق وهو $g=hk$ لكل $g\in G$، حيث $h\in H$ و $k\in K$.

3. $H\cap K=\{1\}$.

عليه فالشروط الثلاث متحققة. إذن G هو ضرب مباشر داخلي لكل من الزمر الجزئية الداخلية H و K.

مبرهنة (2-17):

لتكن G زمرة منتهية تتحقق فيها العلاقة $x^2 = 1$ لكل $x \in G$، (كل عنصر في G رتبته 2)، فإن:

$$G = \underbrace{C_2 \times C_2 \times \ldots \times C_2}_{r}$$

r من الزمر رتبة كل منها 2

وإن رتبة G هي العدد 2^r.

البرهان:

نفرض أن رتبة G هي 2 (أي $|G| = 2$)، فإن $G = C_2$. إذا كانت رتبة G اكبر من 2 وإن $x, y \in G$ (بحيث أن x, y كل منهما لا يساوي 1).

إذن:

$$x^2 = y^2 = 1$$

أي أن $x = x^2$ و $y = y^{-1}$

لذا من العلاقة $x^2 = 1$ فإن

$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$$

لذا من العلاقات أعلاه أن G زمرة ابيلية. نفرض $y_1, y_2, \ldots, y_r$ تولد G وغير مكررة.

بما أن G أبيليه فإن ضرب المولدات يمكن ترتيبه بحيث يكون كل عنصر في G يأخذ الشكل:

$$y_1^{i_1}, y_2^{i_2}, \ldots, y_r^{i_r}$$

لكن $x^2 = 1$ لكل $x \in G$ فإن $t_1, ..., t_2, ..., t_r$ تأخذ القيم $1, 0$.

عليه فإن الضرب أعلاه يكون بيناً، لأنه إذا تساوت صيغتين من حاصل الضرب $y_1^{t_1}, y_2^{t_2}, ..., y_r^{t_r}$ فإننا سنحصل على الصيغة:

$y_1^{t_1}, y_2^{t_2}, ..., y_r^{t_r}$

بحيث $t_1, t_2, ..., t_r$ إما صفر أو 1، وهذا يعني أن أحد المولدات يمكن التعبير عنه بدلالة المولدات الأخرى وهذا يناقض كون المولدات غير متكررة. لهذا فإن التعبير $y_1^{t_1}, y_2^{t_2}, ..., y_r^{t_r}$ يكون وحيداً. إذن:

$$G = \langle y_1 \rangle \times \langle y_2 \rangle \times ... \times \langle y_r \rangle$$

أي: $G = \underbrace{C_2 \times C_2 \times ... \times C_2}_{\text{r من العوامل}}$

2-5 الزمر التي رتبها أقل أو تساوي 8

يتضمن هذا الجزء دراسة مفصلة عن الزمر التي رتبة كل منها أصغر أو تساوي 8.

1. الزمر التي رتبها 2

نفرض أن G زمرة رتبتها 2، إذن يوجد عنصر مثل $x \in G$ بحيث $x^2 \in 1$، أي $1, x \in G$. أي أن $G = \{1, x\}$ وهذا يعني أن $G = \langle x : x^2 = 1 \rangle$ إذن توجد زمرة واحدة رتبتها 2 وهي أبيليه ودورية.

2. الزمر التي رتبها 4

نفرض أن G زمرة تبتها 4. إذن يوجد عنصر مثل x في G رتبته إما 2 أو 4 (لاكرانج). فإذا كانت رتبة x أربعة فإن $x, x^2, x^3, 1 \in G$ أي أن $G = \{1, x, x^2, x^3\}$. أو $G = \langle x : x^4 = 1 \rangle = C_4$ وهي زمرة أبيليه ودورية.

إذا كانت رتبة x هي 2 فإن $x^2=1$. أي أن $1, x \in G$ ولما كانت رتبة G هي 4 فإنه يوجد عنصر آخر مثل y في G لا يساوي x. عليه فإن رتبة y إما 4 أو 2. فإذا كانت رتبة y هي 4 فسنحصل على $1, y, y^2, y^3 \in G$ وهذا تناقض لأن رتبة G في هذه الحالة ستصبح اكبر من 4.

إذن رتبة y هي 2. أي $1, y \in G$. عليه $1, x, y, xy \in G$. لذا فإن الضرب من اليمين yx يجب أن يساوي احد عناصر G لأن عكس ذلك يعني أن رتبة G اكبر من 4 وهذا تناقض أيضاً.

لذا فإن: إما $yx=1$ تناقض لأن $y=x^{-1}$ وهذا غير ممكن.

أو $yx=x$ تناقض لأن $y=1$ وهذا غير ممكن.

أو $yx=y$ تناقض لأن $x=1$ وهذا غير ممكن.

أو $yx=xy$ وهي الحالة الوحيدة التي تصح.

عليه فإن:

$$G=\{1,\ x,\ y,\ x\,y\}$$

أو $G=\langle x, y=x^2=y^2=1, y\,x=x\,y\rangle$

أو $=\langle x:x^2=1\rangle\times\langle y;y^2=1\rangle$

أو $=C_2\times C_2$

وخلاصة القول فإننا حصلنا على زمرتين رتبة كل منهما 4 وكليهما أبيليه ودورية وهما:

a. $G_1=\langle x:x^4=1\rangle=C_4$

b. $G=C_2\times C_2$

3. الزمر التي رتبها الأعداد الأولية 3، 5 او 7

توجد زمرة واحدة فقط لكل عدد أولي على التوالي، راجع التمرين بعد نتيجة (2-12).

4. الزمر التي رتبها 6

نفرض $|G|=6$ حيث G زمرة و x عنصر في G. إذن رتبة x إما 2 أو 3 أو 6 (مبرهنة لاكرانج).

a. إذا كانت رتبة G هي 6 فإن $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5 \in G$ أي أن:

$$G=\{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5\}$$

أو

$$G=\langle x\ :\ x^6=1\rangle=C_6$$

b. إذا كانت رتبة x هي 3 فإن $x^3=1$ أي $1,\ x,\ x^2 \in G$ ولما كانت $|G|=6$ إذن يوجد عنصر $y \in G$ يختلف عن x. لذا فإن رتبة y هي إما 6 أو 3 أو 2 إذا كانت رتبة y هي 6 فإن هذه الحالة غير ممكنة لأن $|G|=6$.

أما إذا كانت رتبة y هي 3 فإن هذه الحالة أيضاً غير ممكنة لأن رتبة G تساوي 6.

إذن رتبة y هي 2، أي أن $1,\ y \in G$. بمعنى آخر $1,\ x,\ x^2,\ y,\ xy,\ x^2y \in G$ بقي أن نبرهن أن yx و yx^2 تساوي عنصرين من عناصر G وإلا نحصل على تناقض لأن $|G|=6$.

إذن إما $y\,x=1$ غير ممكنة لأن $y=x^{-1}$ وهو تناقض

أو $y\,x=x$ الحالة غير ممكنة لأن $y=1$

أو $y\,x=x^2$ الحالة غير ممكنة لأن $y=x$

أو $y\,x=y$ الحالة غير ممكنة لأن $x=1$

أو $y\,x = xy$ الحالة غير ممكنة لأن $(y\,x)^2 = x^2 \neq 1$, $(y\,x)^3 = y \neq 1$ إذن رتبة yx ستة وهذا غير ممكن ($|G| = 6$).

أو $y\,x = x^2 y$ وهي الحالة الوحيدة التي تصح.

إذن $y\,x = x^2 y$.

$$y\,x^2 = (yx)x = (x^2y)\,x \;=\; x^2\,(y\,x) = x^2.\,x^2\,y = x^4 y = xy$$

تمرين

اكتب أسباب جميع الخطوات.

لذا فإننا سنحصل على زمرة ثانية وهي

$$G = \langle x, y : x^3 = y^2 = 1, y\,x = x^2\,y \rangle$$

إذن حصلنا على زمرتين رتبة كل منهما 6، أحدهما ابيلية والثانية غير ابيلية وهما:

1. $G_1 = \langle x : x^6 = 1 \rangle$
2. $G_2 = \langle x, y : x^3 = y^2 = 1, y\,x = x^2\,y \rangle$

c. إذا كانت رتبة x تساوي 2، فإن الحالة (b) تتكرر من خلال تبديل x بالعنصر y.

5. الزمر التي رتبة كل منها 8

a. توجد خمسة زمر رتبة كل منهما 8 الأولى ابيلية ودورية، الثانية ابيلية، أما الثالثة فهي أبيلية ودورية. هذه الزمر هي

$$1.\; G_1 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7\}$$
$$= \langle x : x^8 = 1 \rangle$$
$$= C_8$$

2. $G_2 = \langle x, y : x^4 = y^2 = 1, y x = x y \rangle$

$\cong C_4 \times C_2$

3. $G_3 = \langle x,y,z : xy = yx, xz = zx, yz = zy \rangle$

$= \langle x : x^2 = 1 \rangle \times \langle y : y^2 = 1 \rangle \times \langle z : z^2 = 1 \rangle$

$\cong C_2 \times C_2 \times C_2$

أما الزمر الباقية التي رتبة كل منها 8 فهي

b. نفرض $|G| = 8$، نختار $x \in G$. إذن رتبة x إما 4 أو 2 (الحالات الأخرى واردة في (1) و(3) من (a).

إذن: $x^4 = 1$، أي $1, x, x^2, x^3 \in G$.

عليه يوجد عنصر آخر مثل $y \in G$ يختلف عن x. رتبة y هي إما 8 أو 4 أو 2. الاحتمال الأول عندما $y^8 = 1$ غير ممكنة، والاحتمال الثاني عندما $y^4 = 1$ غير ممكنة لذا الاحتمالات الباقية هي:

إما $y^2 = 1$ أو $y^2 = x^2$ (أي $y^4 = x^4 = 1$)

1. إذا $y^2 = 1$، فإن yx يأخذ الاحتمالات

إما (a) $y x = x y$ وفي مثل هذه الحالة ستكون الزمرة أبيلية ودورية

أو (b) $y x = x^2 y$ وهذه غير ممكنة لأنه: إذا $y x = x^2 y$ نضرب الطرفين في y^{-1}:

$y^{-1} y x = y^{-1} x^2 y$

أي:

$x = y^{-1} x^2 y$

نربع الطرفين:

$$x^2 = (y^{-1} x^2 y)(y^{-1} x^2 y) = y^{-1} x^4 y = y^{-1}.1.y$$
$$=1$$

وهذا تناقض لأن $x^2 \neq 1$

أو (c) $yx = x^3 y$ أي $\left[(yx)^2 = 1\right]$

أي أننا نحصل على الزمرة غير الأبيلية التالية:

$$G_4 = \langle x, y : x^4 = y^2 = 1;\ y x = x^3 y \rangle$$

2. إذا $y^2 = x^2$ (في هذه الحالة $x^4 = y^4 = 1$):

إذن:

إما (a) $y x = x y$ ومن هذا سنحصل على زمرة ابيلية وهي الحالة التي سبق وأن وجدناها (الحالة 2 من 5).

أو (b) $y x = x^2 y$ وهذه غير ممكنة لأن ذلك يعني:

$$y x = y^2 y$$

أي أن $y^2 = x$ وهذا تناقض.

أو (c) $y x = x^3 y$ وهذه الحالة هي الحالة الصحيحة.

إذن سنحصل من هذا على الزمرة غير الأبيلية التالية:

$$G_5 = \langle x, y : x^4 = 1 ;\ x^2 = y^2,\ y x = x^3 y \rangle$$

وخلاصة القول فإننا حصلنا على الزمر الخمسة التي رتبة كل منها 8، وهي

1. $G_1 = \langle x : x^8 = 1 \rangle$ أبيلية ودورية.
2. $G_2 = \langle x, y : x^4 = y^2 = 1, y x = x y \rangle$ ابيلية ودورية ومن النوع $C_4 \times C_2$.
3. $G_3 = C_2 \times C_2 \times C_2$ ابيلية.

4. $G_4 = \langle x, y : x^4 = y^2 = 1, y\,x = x^3\,y \rangle$ غير أبيلية وتسمى زمرة (دايهدرال). وتكتب بالشكل D_4، وهي واحدة من مجموعة زمر مضلع منتظم ذي n من الرؤوس رتبها 2n ويرمز لها بصورة عامة بالرمز:

$$D_{2n} = \langle x,\ y:\ x^n = 1,\ \ y^2 = 1,\ \ (x\,y)^2 = 1 \rangle$$

رتبة ⟵

5. $G_5 = \langle x, y:\ x^4 = 1, x^2 = y^2, y\,x = x^3\,y \rangle$ غير أبيلية وتسمى زمرة (كواترنين) وتكتب Q_8، وهي زمرة عناصرها أعداد عقدية:

$$x = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

تمارين محلوله

1. لتكن G=R مجموعة الأعداد الحقيقية ، واضح أن G زمرة جمعية . فلو فرضنا أن H مجموعة الأعداد النسبية فإن H زمرة جزئية جمعية في G.

2. نفرض أن Z هي مجموعة الأعداد الصحيحة فإن Z زمرة ولو افترضنا أن

$H = \{3n : n \geq 0\}$

فإن H لا تكون زمرة جزئية في Z وذلك لأن معكوس العنصر 3n، حيث $n \geq 0$، غير موجود في H.

3. لتكن $G = \{1, -1, i, -i\}$ فإن من السهولة اثبات أن G زمرة ضربية حيث $i = \sqrt{-1}$.

إذا افترضنا أن $H = \{1, -1\}$ مجموعة داخل G فإن H تشكل زمرة جزئية في G (وضح ذلك) .

في الحقيقة هذه الزمرة الجزئية تسمى زمرة جزئية عظمى داخل G لأنه لا يمكن ايجاد زمرة جزئية مثل K داخل G بحيث $H \subset K \subset G$.

4. لتكن

$$G=\{I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}$$

لاحظ أن G مع عملية ضرب المصفوفات تكون زمرة (جرب الحل) وأن هذه الزمرة ليست ابيلية لأن:

$$CA=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}=D$$

$$AC=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}=E$$

لما كانت $C^2=I$ و $CA=D$ و $AC=E$ و $ACA=EA=B$ فإن G يمكن توليدها من العنصرين A و C ، أي أن $G=\langle A,C\rangle$.

5. بالعودة للمثال 3 حيث $G=\{1,-1,i,-i\}$ و $H=\{1,-1\}$ فإن المجاميع المشاركة هي H و Hi لأن

$$H1=H$$
$$H(-1)=\{1,-1\}(-1)$$
$$=\{-1,1\}$$
$$=H$$
$$H(i)=\{1,-1\}(i)$$
$$=\{i,-i\}$$
$$\neq H$$
$$H(-i)=\{1,-1\}(-i)$$
$$=\{-i,i\}$$
$$\neq H$$

لاحظ أن $H\cap Hi=\varphi$

تمارين الفصل الثاني

1. إذا كانت G زمرة و $x \in G$. برهن أنه يوجد n عدد صحيح موجب بحيث $x^n = 1$.
2. لتكن G زمرة فإن:
   a. $|Z(G)| \geq 1$
   b. $|C(x)| \geq 2$، لكل $x \in G$
3. نفرض أن G زمرة و $H \subseteq G$, $K \subseteq H$. برهن أن $K \subseteq G$.($\subseteq$ تعني زمرة جزئية).
4. إذا كانت $H \subseteq G$, $[G:H] = 2$ برهن أن G زمرة ابيلية.
5. برهن أن $Z(G) = G$ إذا وفقط إذا G ابيلية.
6. برهن أن أي زمرة جزئية في زمرة أبيلية هي زمرة جزئية أبيلية.
7. أوجد الزمر الجزئية في $(Z_{12}, +)$, $(Z_{18}, +)$.
8. لتكن G زمرة أبيلية فإن $Hx = xH$ حيث $x \in g$ و HCG.
9. لتكن $H \subseteq G$, $K \subseteq G$ فإن $(H \cup K) \subseteq G$ إذا وفقط إذا $H \subseteq G$ أو $K \subseteq G$.
10. إذا كانت $H = \langle 2 \rangle$, $K = \langle 6 \rangle$ حيث $H \subseteq Z_{12}$, $K \subseteq Z_{12}$ أوجد HK.
11. برهن أن $H = \{0, 4, 8, 12\}$ زمرة جزئية في Z_{16}.

الفصل الثالث

الزمر السوية

الفصل الثالث

الزمر السوية

Normal Subgroups

سندرس في هذا الجزء واحدة من أهم العلاقات في نظرية الزمر ألا وهي علاقة الترافق. كذلك سنسلط الضوء على زمر جزئية مهمة هي الزمر السوية والتي تفيدنا في الدراسة المستقبلية.

3-1 صفوف الترافق Conjugacy Classes

تعريف (3-1)

يقال للعنصرين x وy في G بأنهما مترافقين إذا وجد عنصر ثالث مثل t في G بحيث:

$y = t^{-1} x t$ ....(1)

يقال للعنصر t بأنه ينقل x إلى y. علاقة الترافق عادة تكتب بالشكل $x \approx y$ وأحياناً تكتب بالرمز:

$a^t = t^{-1}at$

مبرهنة (3-2):

علاقة الترافق هي علاقة تكافؤية.

البرهان:

1. **خاصية الانعكاس:** بما أن $x = 1^{-1} \times 1$ فإن x يرافق نفسه وتكتب $x \approx x$.

2. خاصية التناظر: إذا كانت $x \approx y$ فإن $y \approx x$.

بما أن $x \approx y$ فإنه توجد $t \in G$ بحيث $y = t^{-1} \times t$ بضرب الطرف الأيمن في t^{-1} والطرف الأيسر في t نحصل على:

$$t\, y\, t^{-1} = x$$

أي أن:

$$x = (t^{-1})^{-1}\, y\, t^{-1}$$

وبما أن t^{-1} في G فإن:

$$x = s^{-1}\, y\, s$$

حيث $s = t^{-1}$.

عليه فإن $y \approx x$.

3. خاصية الانتقال: لتكن $x \approx y$ و $y \approx z$ فإن $x \approx z$.

نفرض أن $x \approx y$ عليه يوجد $t_1 \in G$ بحيث $y = t_1^{1} \times t_1$.

وكذلك بما أن $y \approx x$ يوجد عدد مثل s_1 بحيث $z - s_1^{1}\, y s_1$. ومن كلا العلاقتين نحصل على:

$$\begin{aligned} z &= s_1^{-1}\, y\, s_1 \\ &= s_1^{-1}(t_1^{-1} \times t_1)\, s_1 \\ &= s_1^{-1} \times t_1^{-1} \times t_1 s \\ &= (t_1 s_1)^{-1} \times (t_1 s_1) \end{aligned}$$

إذن: $z = r^{-1} \times r$

حيث $r = t_1\, s_1 \in G$

عليه فإن $x \approx z$

لذا فإن علاقة الترافق هي علاقة تكافؤية.

مثال (1)

برهن أن لكل $x, y, t \in G$

1. $(x\,y)^t = x^t\, y^t$
2. $(x^t)^{-1} = (x^{-1})^t$

البرهان:

1. لدينا:

$$(xy)^t = t^{-1} \times yt \text{ (بالتعريف)}$$
$$= t^{-1} \times t\, t^{-1}\, y\, t \,(t\, t^{-1} = 1 \text{ لأن})$$
$$= (t^{-1} \times t)\,(t^{-1}\, y\, t) \text{ (الخاصية التجميعية)}$$
$$= x^t\, y^t \text{ (بالتعريف)}$$

يمكن تعميم هذه العلاقة إلى n من العوامل:

$$(x_1\, x_2 \dots x_n)^t = (t^{-1} x_1 t)(t^{-1} x_2 t) \dots (t^{-1} x_n t)$$
$$= x_1^t . x_2^t \dots x_n^t$$

2. نعوض $y = x^{-1}$ في العلاقة $(x\,y)^t = x^t\, y^t$ وبما أن $1^t = 1$، فإن:

$$x^t\,(x^{-1})^t = 1$$

ومن هذا:

$$(x^t)^{-1} = (x^{-1})^t$$

ملاحظة

لما كانت علاقة الترافق هي علاقة تكافؤية فإنها عندما تعمل على عناصر الزمرة G ستوزع تلك العناصر إلى صفوف منفصلة عن بعضها (لا يوجد عنصر مشترك بين تلك الصفوف) تسمى صفوف التكافؤ. فالصف (x) يمثل

العنصر x والعناصر المترافقة معه والصف (y) يمثل العنصر y والعناصر المترافقة معه وهكذا فإن:

$$G = (x) \cup (y) \cup ... \cup (z)$$

مثال (2)

أوجد صفوف الترافق في الزمرة $G = S_3$.

الحل:

علمنا من الفصل الأول إن S_3 يمكن التعبير عنها بالشكل:

$$S_3 = \langle x, y:\ x^3 = y^2 = 1;\ \ y\,x = x^2\,y \rangle$$

أي أن عناصر الزمرة S_3 هي:

$$\{\ 1,\ x,\ x^2, y,\ x\,y,\ x^2\,y\}$$

لإيجاد صفوف الترافق نأخذ t لتمثل المولدات y, x ولا نحتاج أن نأخذ t لتمثل عناصر S_3 الستة لأن y, x هما المولدات لعناصر S_3 الستة.

بما أن:

$$y^{-1}.1.\,y = 1 \text{ و } x^{-1}.1.\,x = 1$$

فإن العنصر المحايد يترافق مع نفسه، لذا فإن (1) يمثل الصف الأول.

نأخذ العنصر x ونوجد العناصر المترافقة معه وكالآتي:

$$x^{-1} \times x = x$$
$$y^{-1} \times y = y \times y = (y\,x)\,y = (x^2\ y)\,y = x^2\ y^2 = x^2$$

إذن x يترافق مع نفسه ومع العنصر x^2. والآن نأخذ العنصر x^2 ونوجد العناصر المترافقة معه بواسطة المولدان y, x.

$$x^{-1}\,x^2\,x = x^2$$
$$y^{-1}\,x^2\,y = y\,x^2\,y = y\,y\,x = y^2\,x = x$$

إذن الصف الثاني هو $\{x, x^2\}$ ونعبر عنه بالشكل (x). نستخدم نفس الطريقة أعلاه على العنصر y:

$$x^{-1} y x = x^2 y x = x^2 x^2 y = x^4 y = x y$$

إذن y يترافق مع xy. والآن نأخذ xy ونوجد العناصر المترافقة معه.

نستمر:

$$x^{-1} (x y) x = y x = x^2 y$$

إذن الترافق أعادنا للعنصر y. الآن نعمل الترافق بواسطة المولد y.

$$y^{-1} y y = y$$

إذن الآن نتوقف لأننا حصلنا على نفس العنصر ولذا فالصف الثالث هو:

$$\{y, x y, x^2 y\}$$

ونمثله بالصف (y).

إذن صفوف الترافق هي: $\{1\}, \{x, x^2\}, \{y, x y, (x^2 y)\}$ ويمكن كتابتها بشكل ابسط بالشكل: $\{(1), (x), (y)\}$.

أي أن:

$$G = (1) \cup (x) \cup (y)$$

حيث

$$(1) = t^{-1} 1 t$$

$$(x) = t_1^{-1} x t_1 \cup t_2^{-1} x^2 t_2$$

$$(y) = s_1^{-1} y s_1 \cup s_2^{-1} x y s_2 \cup s_3^{-1} x^2 y s_3$$

مبرهنة (3-3):

لتكن $a \in G$ و $C(a)$ مركز a في G. لذا فإن عناصر صف الترافق (a) تتقابل بشكل تباين $(1-1)$ مع المجاميع المشاركة التي يكونها $C(a)$ في G. وعلى وجه الخصوص إذا كان دليل $C(a)$ عدد منتهي فإن:

$$|(a)| = [G:C(a)]$$

حيث $|(a)|$ عدد عناصر الصف (a).

البرهان:

1. نعرف التقابل θ بالشكل التالي:

$$(x \in G)\ \theta : C(a)\,x \to x^{-1}ax \quad \ldots\ldots(2)$$

2. نبرهن أن θ معرفة تعريفاً جيداً.

نأخذ عنصر $u \in C(a)$. عليه فإن $C(a)\,x$ يمكن كتابته $C(a)\,ux$ حيث أن هذا التعويض لا يؤثر على الطرف الأيسر من الصيغة (2) أعلاه، والآن نبرهن أن هذا التعويض لا يؤثر على الطرف الأيمن أيضاً.

$$(u\,x)^{-1}a(u\,x) = x^{-1}\ u^{-1}au\,x = x^{-1}ax$$

(حيث u تتبادل مع a)

3. نبرهن أن التقابل θ متباين $(1-1)$.

نفرض أن $x^{-1}ax = y^{-1}ay$

عليه فإن $x\,y^{-1} \in C(a)$

إذن $C(a)\,x = C(a)\,y$

ومن هذا نستنتج أن θ متباينة.

4. بما أن x هو عنصر لأعلى التعيين في G، فإن θ شاملة (on to).

نتيجة (3-4):

إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها g وh هو عدد العناصر في الصف (a)، فإن h يقسم g (h أحد عوامل g).

البرهان:

نفرض $c = |C(a)|$. إذن من المبرهنة (2-11) $h = \frac{g}{c}$، أي أن $g = ch$.

نفرض أن G يحتوي على n من صفوف الترافق و $a_1, a_2, \ldots, a_n$ هي مجموعة ممثلات تلك الصفوف. لتكن $h_i = |(a_i)|$. لذا:

$$g = h_1 + h_2 + \ldots + h_n \quad \ldots\ldots(3)$$

هذه العلاقة تسمى معادلة الصف في G.

تعريف (3-5)

لتكن G زمرة وH زمرة جزئية في G، فإن مسوي H في G، يكتب $N_G(H)$، يعرف بالشكل الآتي:

$$N_G(H) = \{ s \in G ; \forall h \in H, \exists h_1, h_2 \in H ; sh = h_1 s, hs = h_2 s \}$$

ملاحظة

يمكن كتابة $N(H)$ بدلاً من $N_G(H)$ لتسهيل العمليات الجبرية.

مبرهنة (3-6):

مسوي الزمرة الجزيئة H في $G(N(H))$ هو زمرة جزئية في G.

البرهان: يترك كتمرين.

تمرين

لتكن H زمرة جزئية في G. و $N(H)$, $C(H)$ مسوي ومركز H على التوالي، فإن $C(H) \subseteq N(H)$.

مبرهنة (7-3):

لتكن G زمرة وH زمرة جزئية في G فإن $x^{-1}Hx$ زمرة جزئية في G.

البرهان: نعرف $x^{-1}Hx$ بالشكل:

$$x^{-1}Hx = \left\{ x^{-1}hx : h \in H ,\ x \in G \right\}$$

لاحظ أن $x^{-1}Hx$ غير خالية. نأخذ $x^{-1}h_1x, x^{-1}h_2x \in x^{-1}Hx$، إذن:

$$x^{-1}h_1x \,.\, x^{-1}h_2x = x^{-1}h_1xx^{-1}h_2x = x^{-1}h_1h_2x = x^{-1}h_3x \in x^{-1}Hx$$

حيث $h_3 = h_1h_2$.

عليه فإن شرط الانغلاق متحقق. أما العنصر المحايد في $x^{-1}Hx$ فهو $x^{-1}1x$ لأن لكل $x^{-1}hx \in x^{-1}Hx$ فإن:

$$x^{-1}hx \,.\, x^{-1}1x = x^{-1}h.1x = x^{-1}hx$$

$$x^{-1}1x \,.\, x^{-1}hx = x^{-1}1.hx = x^{-1}hx$$

وليكن $x^{-1}hx$ عنصراً في $x^{-1}Hx$ فإن معكوسه هو $x^{-1}h^{-1}x$ لأن:

$$x^{-1}hx \,.\, x^{-1}h^{-1}x = x^{-1}hh^{-1}x = x^{-1}1x$$

و

$$x^{-1}h^{-1}x \,.\, x^{-1}hx = x^{-1}h^{-1}hx = x^{-1}1x$$

لذا فإن $x^{-1} H x$ زمرة جزئية في G.

ملاحظة

1. المعادلة $x^{-1} H x = y^{-1} H y$ تكافئ $H x y^{-1} = x y^{-1} H$ إذا وفقط إذا $x y^{-1} \in N(H)$ إذا وفقط إذا $x = t y$ حيث $t \in N(H)$. والزمرة $H = t^{-1} H t$ إذا وفقط إذا $t \in N(H)$.

   من الواضح أن $H \subseteq N(H)$ لأنه إذا كان $h \in H$ فإن $h^{-1} H h = H$.

2. إذا كان مسوي H هو الزمرة G نفسها، أي أن $N(H) = G$، فإن H سوية أو ثابتة في G ونرمز لها $H \lhd G$ ($\lhd$ مثلث متساوي الساقين).

   لكي نبرهن أن $H \lhd G$، يكفي أن نبرهن:

$$x^{-1} H x \subset H$$

لكل $x \in G$، لأنه إذا كانت $x^{-1} H x \subset H$ فبالإمكان تعويض x^{-1} بدل x فنحصل على $x H x^{-1} = H$ والتي تكافئ $H \subset x^{-1} H x$ وبالتالي نحصل على $x^{-1} H x = H$.

هناك طريقتين مفيدتين في معرفة كون $H \lhd G$:

a. نفرض G يمكن توليدها من العناصر $x_1, x_2, ..., x_n$. إذا استطعنا إثبات أن:

$$x_1^{-1} H x_1 = H,\ x_2^{-1} H x_2 = H,\ ...,\ x_n^{-1} H x_n = H$$

فإن $x_1, x_2, ..., x_n \in N(H)$

وبما أن $x_1, x_2, ..., x_n$ تولد الزمرة G كاملة، فإننا سنحصل على $G = N(H)$ وبالتالي $H \lhd G$.

b. إذا كانت H يمكن توليدها من العناصر $y_1, y_2, ..., y_K$ فإن $H \lhd G$ إذا

برهنا:

$y_i^t \in H \quad ; \quad \forall t \in G$ (أي أن $t^{-1} H t = H$). حيث $i = 1, 2, ..., k$.

مثال (3)

لتكن $G = \langle x, y : x^4 = y^2 = 1, yx = x^3 y \rangle$

ويمكن كتابته:

$G = \langle x, y : x^4 = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$

هذه الزمرة هي إحدى الزمر الغير أبيلية والتي سبق وإن تمت مناقشتها في (5-2).

نفرض أن $H = \langle x : x^4 = 1 \rangle$

عليه فإن H زمرة دورية رتبتها 4 متولدة بواسطة x.

واضح أن $x \in N(H)$، كذلك $y x y^{-1} = x^3$، لذا $y H y^{-1} \subseteq H$. لكن الزمر $y^{-1} Hy$ و H هي نفسها، لذا فإن رتبها متساوية. هذا يعني أن y (الذي يساوي y^{-1}) ينتمي إلى $N(H)$، أي أن $N(H) = G$.

مثال (4)

لتكن G زمرة و$Z(G)$ مركزها، فإن $Z(G)$ دائماً سوية في G لأن $x^{-1} Z(G) x = Z(G)$ متحققة لكل $x \in G$. نحن نعلم أيضاً $x^{-1} z x = z$ لكل $z \in Z(G)$.

مثال (5)

إذا كانت $H_1, H_2, ..., H_n$ زمر جزئية سوية في G فإن تقاطعهما زمرة جزئية سوية لأن من $x^{-1} H_i x = H_i$ (حيث $i = 1, 2, ..., n$) نستنتج أن:

$$x^{-1} (H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_n) x = H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_n$$

مثال (6)

لتكن H زمرة جزئية في الزمرة G بحيث $[G:H]=2$ (أي الدليل يساوي 2) فإن $H \triangleleft G$.

بما أن دليل H في G هو 2 فإن عدد المجاميع المشاركة اليمنى هو 2 الأولى هي H والأخرى هي Ht لكل $t \in G$. بنفس الطريقة عدد المجاميع المشاركة اليسرى هي 2 وهما H و tH لكل $t \notin G$، لذا فإن $Ht = tH$ لكل $t \notin H$. وبما أن $H = Ht = tH$ لكل $t \in H$ لذا فإن $H \triangleleft G$.

مثال (7)

الزمر المتذبذبة، لتكن $G = S_3$ زمرة التناظر من الدرجة 3 حيث:

$S_3 = \{I, (12), (13), (23), (123), (132)\}$.

لنأخذ العلاقة

$$\prod_{i<j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \quad \text{(حيث } i, j = 1, 2, \ldots, 6\text{)}$$

ملاحظة

الشرط $i < j$ يأخذ القيم 1، 2، 3. إما $\sigma(i)$ أو $\sigma(j)$ فهما صورة i و j بفعل الترتيبة σ. $\prod_{i<j}$ حاصل ضرب جميع احتمالات العوامل عندما $i < j$.

إذا كانت إشارة حاصل الضرب $\prod_{i<j}$ موجبة فإن الترتيبة الأصلية تكون زوجية أما إذا كانت سالبة فالترتيبة الأصلية فردية.

لنأخذ الترتيبة (3 2 1)، سنوضح فيما إذا كانت زوجية أو فردية باستعمال قاعدة الضرب $\prod_{i<j}$:

$$\underset{i<j}{\pi}\ \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}=\frac{\sigma(1)-\sigma(2)}{1-2}\bullet\frac{\sigma(1)-\sigma(3)}{1-3}\bullet\frac{\sigma(2)-\sigma(3)}{2-3}$$

$$=\frac{2-3}{1-2}\bullet\frac{2-1}{1-3}\bullet\frac{3-1}{2-3}$$

$$=\frac{-1}{-1}\bullet\frac{1}{-2}\bullet\frac{1}{-1}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

وبما أن إشارة الضرب موجبة فإن الترتيبية (1 2 3) موجبة وعليه فهي زوجية.

نأخذ الترتيبية (1 3)

$$\underset{i<j}{\pi}\ \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}=\frac{\sigma(1)-\sigma(3)}{1-3}$$

$$=\frac{3-1}{1-3}$$

$$=\frac{2}{-2}$$

إذن الترتيبية (1 3) هي فردية لأن الإشارة سالبة.

وهكذا بنفس الطريقة نجد أن الترتيبيات (1 2 3) و(1 3 2) والعنصر المحايد 1 هي عناصر زوجية. أما الترتيبات (1 2)، (1 3) و(2 3) فهي فردية. الترتيبات الفردية لا تكوّن زمرة جزئية بينما الترتيبات الزوجية تكوّن زمرة جزئية (تحقق من ذلك).

نلاحظ أن عناصر S_3 تتوزع إلى مجموعتين متساويتين من العناصر المجموعة الأولى فردية والثانية زوجية. المجموعة زوجية العناصر تؤلف زمرة جزئية تسمى الزمرة الجزئية المتذبذبة ويرمز لها:

$$A_3=\{1,\ (123),\ (132)\}$$

بما أن:

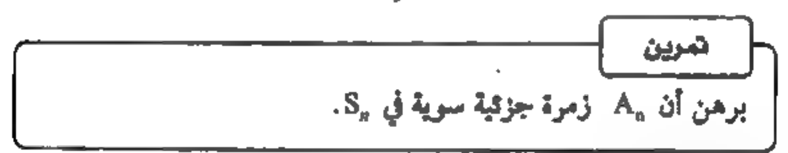
$$|A_3|=\frac{|S_3|}{2}=\frac{6}{2}=3$$

و

$$[S_3 : A] = \frac{|S_3|}{|A_3|} = \frac{6}{3} = 2$$

أي أن، الدليل يساوي 2، فإن A_3 زمرة جزئية سوية في S_3.

وبصورة عامة A_n زمرة جزئية سوية في S_n.



تمرين

برهن أن A_n زمرة جزئية سوية في S_n.

3-2 زمرة القسمة Quotient Group

تعريف (3-8)

لتكن H زمرة جزئية سوية في الزمرة G (أي $H \lhd G$)، فإن G/H تعرف بالشكل:

$$G/H = \{ H x : \forall x \in G \}$$

نأخذ Hx وHy مجموعتين مشاركتين في G/H. بما أن $H^2 = H, H x = x H$ فإن:

$H x Hy = H H x y = H x y$ ....(1)

لذا فإن ضرب أي مجموعتين مشاركتين هو مجموعة مشاركة أيضاً تنتمي للمجموعة G/H. ولكي نبرهن أن (1) معرفة تعريفاً جيداً نفرض أن $H x = Hx'$ و $H y = Hy'$. لذا فإن $x' = u x$ و $y' = v y$، حيث $u, v \in H$ عليه فإن $x' y' = u x v y = u v x y = h x y$ حيث $h = uv \in H$، لذا فإن $H x y = H x y'$.

إذن (1) عملية معرفة على G/H ومنها فإن شرط الانغلاق متحقق.

العنصر المحايد في G/H هو H لأن:

$$H (H x) = (H x) H = H x$$

ولإيجاد المعكوس، نفرض أن $Hx \in G/H$. إذن معكوس Hx هو Hx^{-1} لأن:

$$(Hx)(Hx^{-1}) = H = (Hx^{-1})(Hx)$$

إذن المجموعة G/H والعملية المعرفة عليها تكوّن زمرة تسمى زمرة القسمة للزمرة G بواسطة H. رتبة زمرة القسمة G/H تساوي دليل H في G، أي:

$$|G/H| = [G:H] \quad \text{...}(2)$$

مثال (1):

لتكن $G = Z$ الزمرة الجمعية لمجموعة الأعداد الصحيحة. نختار $m > 1$ عدد معين من Z، فإن المجموعة

$$H = \{0, \mp m, \pm 2m, \ldots, \mp km\}$$

تكوّن زمرة جزئية داخل Z، ولما كانت Z زمرة أبيلية فإن H زمرة سوية في Z فإذا كان $x \in Z$ أي عنصر، لذا فإن:

$$x = qm + r \quad \text{...}(3)$$

حيث $0 \le r < m$. (خوارزمية القسمة).

لكن qm يقع في H لذا $x \in H + r$.

عليه:

$$Z/H = \{H, H+1, H+2, \ldots, H+(m-1)\} \quad \text{......................}(4)$$

هي مجموعة المجاميع المشاركة التي تكون زمرة جزئية في Z والتي تسمى زمرة القسمة لأن

1. خذ $H + r$ و $H + s$ في Z/H وبما أن:

$$(H+r) + (H+s) = H + (r+s) = H + k$$

حيث $k = r + s \in Z$. إذن شرط الانغلاق متحقق.

2. العنصر المحايد هو H (بعض الأحيان يكتب $H+0$).

لأن $(H+r)+(H+0)=H+r$ وكذلك $(H+0)+(H+r)=H+r$.

3. التجميع متحقق (برهن).

4. ليكن $H+r \in Z/H$ فإن معكوسه هو $H+(-r)$ لأن

$$(H+r) + (H+(-r)) = H + (r-r) = H+0 = H$$

وبنفس الطريقة $H+(-r) + H + r = H$

مثال (2):

نفرض أن G هي الزمرة التي رتبتها 8 الواردة في الحالة 5 من البند (4-2). أي أن:

$$G = \langle x, y: x^4 = 1, x^2 = y^2, yx = x^3 y \rangle \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

من الواضح أن العنصر x^2 يتبادل مع x وy ومع جميع عناصر G الأخرى لأن x وy يولدان G.

لذا فإن:

$$H = \{1, x^2\}$$

حيث أن $x^4 = 1$. هو زمرة جزئية سوية في G، وفي الحقيقة هو مركز G.

عليه:

$$G/H = \{H, Hx, Hy, Hxy\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

لذا فإن $[G:H] = \frac{8}{2} = 4$ من المجاميع المشاركة.

والآن G/H هي زمرة رتبتها 4 وبما أن رتبة كل عنصر فيها تساوي 2، لأن:

$(H\,x)^2 = H\,x^2 = H$ (لأن $x^2 \in H$) وكذلك $(H\,y)^2 = H$

وبما أن G/H أبيلية رتبتها 4 فإن:

$$(H\,x\,y)^2 = (H\,x)^2\,(H\,y)^2 = H$$

عليه فإن:

$$G/H = C_2 \times C_2$$

مبرهنة (3-9):

إذا كانت الزمرة G غير ابيلية وZ مركزها فإن G/Z ليست دورية.

البرهان:

إذا كانت G/Z زمرة دورية فإن جميع المجاميع المشاركة فيها يمكن كتابتها بالصيغة $Z\,x^i$ حيث $x \in G$ و $x \notin Z$.

إذا كانت a ,b عناصر لأعلى التعين في G وداخل المجاميع المشاركة $Z\,x^k$ و$Z\,x^h$ على التوالي فإن:

$a = z_1\,x^k$ و $b = z_2\,x^h$ حيث $z_1,\ z_2 \in Z$

عليه:

$$ab = z_1\,x^k\,z_2\,x^h = z_1\,z_2\,x^{k+h} = ba$$

أي أن G أبيلية، وهذا يناقض الفرض.

نتيجة (3-10):

إذا كانت $|G| = p^2$، حيث p عدد أولي، فإن G أبيلية.

البرهان:

نفرض Z مركز G. لذا $|Z|$ إما p أو p^2.

إذا كانت $|Z| = p^2$ فإن $G = Z$.

وإذا كانت $|Z| = p$ فإن $|G/Z| = p$. عليه فإن G/Z دورية وهذا غير ممكن بواسطة مبرهنة (9-3).

تمارين محلولة

1. مجموعة الإعداد الصحيحة Z تكون زمرة تبديلية تحت عملية الجمع والمجموعة.

$3Z = \{3x : x \in Z\}$

هي زمرة جزئية سوية في Z، لذا فإن

$Z/3Z = \{3Z+0, 3Z+1, 3Z+2\}$

تكون زمرة قسمة في Z تحت عملية الجمع المعرفة

$(3Z+a)+(3Z+b) = 3Z+(a+b)$

حيث $a,b \in Z$

2. لتكن $G=S_3$ و $H = \{1,(12)\}$ زمرة جزئية في G فإن H ليست زمرة سوية (هل تستطيع برهان ذلك ؟).

3. زمرة القسمة في الزمرة الدورية هي زمرة دورية.

لتكن G زمرة دورية متولدة بواسطة العنصر $g \in G$، أي أن $G =< g >$.

لذا فإن $G/H =< g >$، لأن H زمرة جزئية سوية في G.

4. زمرة القسمة في الزمرة الأبدالية تكون ابدالية لتكن G زمرة ابدالية و H زمرة جزئية سوية فيها نفرض $\bar{x},\bar{y} \in G/H$ فإن لكل $\bar{x},\bar{y} \in G/H$ سنحصل على:

$\bar{x}\,\bar{y} = \overline{xy} = \overline{yx} = \bar{y}\,\bar{x}$

5. اعطي مثالاً لزمرة G ليست ابيلية بينما G/H أبيلية، حيث H سوية في G.

خذ $G = S_3$ و $H = A_3$. لاحظ إن S_3 ليست ابيليه لكن S_3/A_3 أبيليه.

حيث

$S_3 = \{1,(12),(13),(23),(123),(132)\}$

$A_3 = \{1,(123),(132)\}$

إذن S_3 / A_3 هـــي زمــرة قِـــسمة تحتـــوي علـــى عنـــصرين فقـــط همـــا $S_3 / A_3 = \{A_3, A_3(12)\}$.

وبمجرد النظر لهذه الزمرة فإنها ابيلية.

تمارين الفصل الثالث

1. لتكن $H \triangleleft G$ و $K \triangleleft G$ برهن أن $(H \cap K) \triangleleft G$.
2. إذا كانت $H \triangleleft G$ و $K \triangleleft G$ حيث $(H \cap K) = \{1\}$. برهن أن:
   $xy = yx$ لكل $x \in H$ و $y \in K$.
3. لتكن G زمرة أبيلية و $H \subseteq G$. برهن أن: G/H أبيلية.
4. نفرض G زمرة دورية و $H \subseteq G$. برهن:
   a. $H \triangleleft G$.
   b. G/H دوريه
5. ما هو عدد الزمر الجزئية السوية في D_4؟ أوجدها؟
6. بين أن $D_4/Z(D_4)$ زمرة رتبتها 4؟ أوجدها؟
7. أوجد صفوف الترافق للزمر المتلبلية A_4 و A_5؟
8. ما هي صفوف الترافق للزمر $GL(2, 2)$ و $GL(3, 2)$؟

الفصل الرابع

التشاكلات

الفصل الرابع

التشاكلات

4-1 التشاكلات الزمرية Group Homomorphisms

سنتطرق في هذا الجزء إلى علاقات عامة التي من خلالها نكوّن الزمر التي لها نفس التركيبات وتسمى بالزمر المتشاكلة.

تعريف (1-4)

لتكن G و G′ زمرتان. التطبيق θ من G إلى G′، يكتب بالشكل (التطبيق هو دالة وجرت العادة على تسميتها تطبيق عند التعامل هندسياً).

$\theta \cdot G \to G'$

يسمى تشاكل إذا تحقق الشرط التالي (Homomorphism)

$\forall x, y \in G; \quad \theta(x\, y) = \theta(x)\ \theta(y)$ ....(1)

إذا كانت θ تشاكل متباين وشامل فإن θ تسمى تشاكل تقابلي وتكتب بالشكل $G \cong G'$ (Isomorphism).

أما إذا كانت θ تشاكل تقابلي و $G = G'$ فإن θ تسمى تشاكل تقابلي ذاتي (Automorphism). وعندما يكون التشاكل التقابلي الذاتي بواسطة علاقة الترافق فعندئذ تسمى θ تشاكل تقابلي ذاتي داخلي (Inner Automorphism) عدا ذلك تسمى θ تشاكل تقابلي ذاتي خارجي (Outer Automorphism).

مثال (1)

نفرض $\theta : Z \to Z_n$ المعرفة بالشكل:

$\theta(z) = \bar{z}$ (حيث $\bar{z}$ صف تطابق).

واضح أن التطبيق θ من $(Z,+)$ إلى $(Z_n,+')$ هو تشاكل شامل لكنه ليس متباين.

مثال (2)

التطبيق $\tau : Z/H \to Z_n$ المعرف بالشكل [لاحظ المثال (1) في (2-3)]:

$\tau(H+x) = \bar{x}$ (حيث $\bar{x}$ صف تطابق في Z_n).

هو تشاكل تقابلي، لأن:

$$\begin{aligned}\tau\left[(H+x)+(H+y)\right] &= \tau\left[H+(x+y)\right]\\ &= \overline{x+y}\\ &= \bar{x}+\bar{y}\\ &= \tau(H+x)+\tau(H+y)\end{aligned}$$

إذن τ تشاكل. وبما أن τ هي متباينة وشاملة (برهن ذلك).

عليه فإن $Z/H \cong Z_n$.

مثال(3)

التطبيق $\tau : x^{-1}Hx \to H$ الزمرة الجزئية $x^{-1}Hx$ إلى الزمرة H والمعرفة بالشكل:

$$\tau(x^{-1}Hx) = h$$

هو تشاكل تقابلي، أي $x^{-1}Hx \cong H$.

الحل:

نأخذ العنصرين $\in x^{-1}Hx$ ، $x^{-1}h_1x$ و $x^{-1}h_2x$. لذا:

$$\tau\left[(x^{-1}h_1x)(x^{-1}h_2x)\right]=\tau\left[x^{-1}h_1h_2x\right]$$
$$=\tau(x^{-1}h_3x)$$
$$=h_3(h_3=h_1h_2\in H)$$
$$=h_1h_2$$
$$=\tau(x^{-1}h_1x).\tau(x^{-1}h_2x)$$

عليه فإن τ تشاكل

نفرض أن $h_1=h_2$

إذن $x^{-1}h_1x=x^{-1}h_2x$

لذا فإن τ متباينة

بما أن $\tau(x^{-1}hx)=h$ صحيحة لكل $h\in H$ فإن τ شاملة.

إذن $x^{-1}Hx\cong H$

مبرهنة (4-2):

إذا كانت $\theta:G\to G'$ تشاكل من الزمرة G إلى الزمرة G'. فإن:

1. $\theta(1)=1'$، حيث 1 المحايد الضربي في G و $1'$ هو المحايد الضربي في G'.
2. $\theta(g^{-1})=\left[\theta(g)\right]^{-1}$ لكل $g\in G$.

البرهان:

1. بما أن θ تشاكل، فإن:

$\theta(g_1g_2)=\theta(g_1)\,\theta(g_2)$ ....(2)

نفرض $g_1=g_2=1$ وبالتعويض في (2) نحصل على $\left[\theta(1)\right]^2=\left[\theta(1)\right]$

إذن: $\theta(1)=1'$

2. عند فرض $g_2=g_1^{-1}$ في (2) نحصل على:

$$\theta(g_1\ g_1^{-1}) = \theta(g_1)\ \theta(g_1^{-1})$$
$$\theta(1) = \theta(g_1)\ \theta(g_1^{-1})$$
$$1' = \theta(g_1)\ \theta(g_1^{-1})$$

وبضرب الطرفين من جهة اليسار في $[\theta(g_1)]^{-1}$ لنحصل على:

$$[\theta(g_1)]^{-1} = 1'\ \theta(g_1^{-1}) = \theta(g_1^{-1})$$

إذن
$$[\theta(g_1)]^{-1} = \theta(g_1^{-1})$$

تعريف (4-3)

إذا كانت $\theta: G \to G'$ تشاكل. فإن نواه θ، تكتب θ Kernel (للاختصار تكتب $\ker\theta$)، تعرف بالشكل الآتي:

$$\ker\theta = \{\ g \in G:\ \theta(g) = 1'\ \}$$

(أي، مجموعة العناصر في G التي صورتها العنصر المحايد $1'$ في G').

مبرهنة (4-4):
لتكن $\theta: G \to G'$ تشاكل. فإن $\ker\theta$ زمرة جزئية في G. كذلك $\ker\theta$ زمرة جزئية سوية في G.

البرهان:

بما أن $\theta(1) = 1'$ [بواسطة مبرهنة (4-2)] فإن $\ker\theta \neq \Phi$.

نفرض $g_1, g_2 \in \ker\theta$ لذا فإن $\theta(g_1) = 1'$ و $\theta(g_2) = 1'$.

إذن $\theta(g_1\ g_2) = \theta(g_1)\ \theta(g_2) = 1'.\ 1 = 1'$

عليه فإن $g_1 \cdot g_2 \in \ker\theta$

إذن شرطَ الانغلاق متحقق.

العنصر المحايد 1 موجود في $\ker\theta$ لأن $\theta(1) = 1'$.

نفرض $g \in \ker\theta$، إذن $\theta(g^{-1}) = [\theta(g)]^{-1} = (1') = 1'$

عليه فإن $g^{-1} \in \ker\theta$

لذا $\ker\theta$ زمرة جزئية في G.

نفرض $g \in \ker\theta$ و $x \in G$ فإن:

$$\begin{aligned}\theta\left[x^{-1}\, g\, x\right] &= \theta(x^{-1})\ \theta(g)\ \theta(x)\\ &= [\theta(x)]^{-1} . 1' . \theta(x)\\ &= 1'\end{aligned}$$

وهذا يعني أن $x^{-1}\, g\, x \in \ker\theta$. أي أن $\ker\theta \triangleleft G$ (لأن شرط أن تكون الزمرة الجزئية $\ker\theta$ سوية في G هو $\ker\theta \subset G$ متحقق).

> **مبرهنة (5-4):**
>
> التشاكل θ متباين (1-1) إذ وفقط إذا احتوت $\ker\theta$ على العنصر المحايد 1 فقط.

البرهان: $\Leftarrow$

نفرض θ تشاكل متباين و $k \in \ker\theta$.

إذن: $\theta(1) = \theta(k) = 1'$

عليه $k = 1$ (لأن θ متباينة).

بالعكس $\Rightarrow$ نفرض أن $\ker\theta = \{1\}$ ، $\theta(x) = \theta(y)$

لذا :

$$\begin{aligned}\theta(x\, y^{-1}) &= \theta(x)\ \theta(y^{-1})\\ &= \theta(x)\ (\theta(y))^{-1}\\ &= \theta(x)\ (\theta(x))^{-1}\end{aligned}$$

عليه $x\,y^{-1} \in \ker\theta$

أي $x\,y^{-1} \in \{1\}$

إذن $x\,y^{-1} = 1$

ومن ذلك نستنتج أن: $x = y$

وبذلك θ متباينة.

ملاحظة

مبرهنة (5–4) هي طريقة ثانية لمعرفة فيما إذا كانت θ متباينة أم لا.

تعريف (6–4)

لتكن $\theta : G \to G'$ تشاكل. فإن صورة G بواسطة θ، تكتب $\operatorname{Im}\theta$، وتعرف على النحو التالي:

$$\operatorname{Im}\theta = \{\, g' \in G' : \exists g \in G \;;\; \theta(g) = g' \,\}$$

> **مبرهنة (7–4):**
> إذا كانت $\theta : G \to G'$ تشاكل فإن $\operatorname{Im}\theta$ زمرة جزئية في G'.

البرهان:

$\operatorname{Im}\theta \neq \Phi$ لأن $\theta\ (1) = 1' \in \operatorname{Im}\varphi$

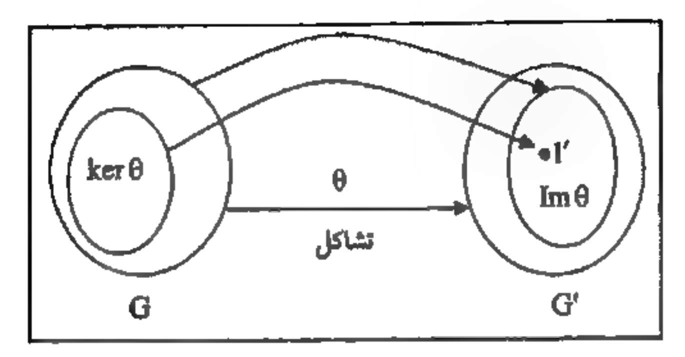
نفرض $g_1', g_2' \in \operatorname{Im}\theta$

بما أن $g_1' \in \operatorname{Im}\theta$ إذن يوجد

$g_1 \in G$ بحيث $\theta\,(g_1) = g_1'$

وكذلك لما كان $g_2' \in \operatorname{Im}\theta$ إذن يوجد

$g_2 \in G$ بحيث $\theta\,(g_2) = g_2'$



إذن

$$g'_1\ g'_2 = \theta(g_1)\ \theta(g_2) = \theta(g_1\ g_2)$$

عليه $g'_1\ g'_2 \in \text{Im}\,\theta$ لأنه يوجد $g_1\ g_2$ في G صورته $g'_1\ g'_2$.

إذن شرط الانغلاق متحقق.

$1' \in \text{Im}\,\theta$ لأن $1' \cdot \theta(1)$.

نفرض $g' \in \text{Im}\,\theta$، إذن يوجد $g \in G$ بحيث $\theta(g) = g'$

عليه:

$$(g')^{-1} = (\theta(g))^{-1} = \theta(g^{-1})$$

إذن $(g')^{-1} \in \text{Im}\,\theta$

لذا $\text{Im}\,\theta$ زمرة جزئية في G'.

ملاحظة

الشكل أعلاه يوضح مواقع كل من $\ker\theta$ و $\text{Im}\,\theta$. وعندما θ تشاكل تقابلي فإن $G' = \text{Im}\theta$.

4-2 مبرهنات التشاكل

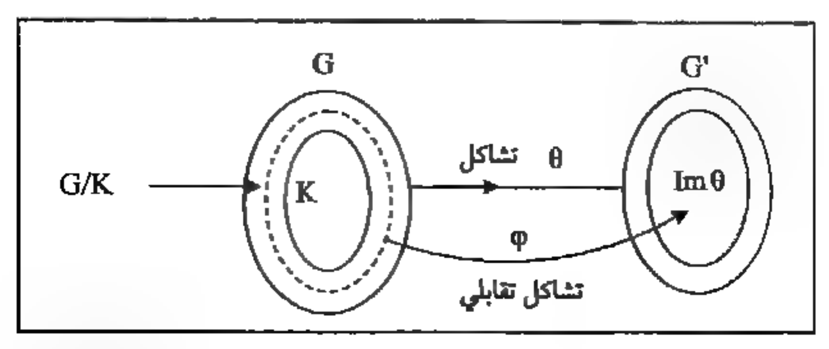
مبرهنة (4-8):

(مبرهنة التشاكل الأولى)

لتكن $\theta : G \to G'$ تشاكل من الزمرة G إلى الزمرة G' و $\operatorname{Im}\theta$ و $\ker\theta$ هما زمر جزئية في G' و G على التوالي. فإن:

$G/\ker\theta \cong \operatorname{Im}\theta$

البرهان:



نفرض أن عناصر $G/\ker\theta$ هي المجاميع المشاركة بالشكل kx وعناصر $\operatorname{Im}\theta$ هي بالشكل $\theta(x)$ حيث $x \in G$. ولسهولة البرهان نفرض أيضاً $\ker\theta = K$.

نعرف التقابل المتباين φ بالشكل

$\varphi : G/K \to \operatorname{Im}\theta$ (أحياناً $\operatorname{Im}\theta$ يكتب بالشكل $(\theta(G))$)، بحيث

$\varphi(Kx) = \theta(x)$ ....(2)

1. نبرهن أن العلاقة (2) معرفة تعريفاً جيداً ولكي نبرهن ذلك نفرض أن:

$Kx = Ky$ ....(3)

ونبرهن $\theta(x) = \theta(y)$

تحت هذا الشرط ستكون φ معرفة جيداً. العلاقة (3) تعني أن $y = k\,x$ حيث $k \in K$، من تعريف K و $\theta(k) = 1'$. لذا

$$\theta(y) = \theta(k\,x) = \theta(k)\,.\,\theta(x) = \theta(x)$$

إذن $\theta(x) = \theta(y)$

2. φ تشاكل وذلك لأن:

$$\begin{aligned}\varphi(K\,x)\ \ \varphi(K\,y) &= \theta(x)\ \theta(y)\\ &= \theta(x\,y)\\ &= \varphi(K\,x\,y)\end{aligned}$$

3. لكي نبرهن أن φ متباينة، نفرض أن $\varphi(K\,x) = \varphi(K\,y)$ ونبرهن أن $K\,x = K\,y$.

إذن نفرض $\varphi(K\,x) = \varphi(k\,y)$، لذا فإن $\theta(x) = \theta(y)$ (تعريف φ)، هذا يعني أن $x\,y^{-1} \in K$ وهذا يكافئ $K\,x = K\,y$.

φ شاملة وذلك لأن x في العلاقة (2) لا على التعين. إذن φ تشاكل تقابلي.

ملاحظة:

من الجدير بالإشارة هنا إلى أن وجود أي زمرة جزئية سوية في G يعتبر نواة لتشاكل ما مناسب. فلو افترضنا أن $N \lhd G$ وأن التطبيق $\tau : G \rightarrow G/N$ معرف بالشكل:

$$\tau(x) = N\,x \quad \text{...}(4)$$

لاحظ أن في هذه الحالة $G' = G/N$. ولبرهان أن (4) تشاكل فإن:

$$\tau(x)\ \ \tau(y) = N\,x\,N\,y = N\,x\,y$$

واضح أن τ تشاكل تقابلي وذلك لأن x في (4) هو اي عنصر في G ولـذا فـإن جميع عناصر G/N مشغولة. نواة τ هي مجموعة جميع عناصر $v \in G$ بحيث

$Nv = N$ (العنصر المحايد G/N) وهذا يكافئ $v \in G$ لذا فإن $\ker \tau = N$. هـذا التطبيق يسمى التطبيق الطبيعي للزمرة G إلى G/N.

مثال (1)

بـالعودة للمثـال (3) في الفـصل الأول حيـث $G = GL(n, F)$ الزمـرة الخطيـة العامة. إذا كانت $x \in G$ وأخذنا التشاكل τ المعرف:

$\tau : G \to F^*$ (F حقل منتهي).

حيث $\tau(x) = \det(x)$

في هذه الحالة $\tau(G) = F^*$ والنواة هي الزمرة الجزئية السوية:

$$K = \{ x : \det(x) = 1 \}$$

بواسطة المبرهنة (4-8) يكون لدينا:

$$G/K \cong F^*$$

حيث F^* هي مجموعة الأعداد الموجبة غير الصفرية في F (F حقل).

ملاحظة

- عندما تكون رتبة النواة منتهية فإن:

$$|\theta(G)| = [G : K] \quad \text{.......(5)}$$

مبرهنة (4-9):

(مبرهنة التشاكل الثانية)

لتكن B زمـرة جزئيـة سـوية في G (أي $B \triangleleft G$). نفـرض أن A زمرة جزئية سوية في G(أي $A \triangleleft G$) بحيث تتحقق العلاقة:

$$B \triangleleft A \triangleleft G$$

فإن:

$$(G/B)/(A/B) \cong G/A \quad \text{.......(6)}$$

البرهان:

نعرف التطبيق φ بالشكل الآتي:

$\varphi = G/B \to G/A$

بحيث

$\varphi(Bx) = (Ax)$ ....(7)

لكل $x \in G$.

1. أولاً نبرهن أن φ معرفة جيداً، من خلال فرض $x = bx$ في الجهة اليسرى، حيث $b \in B$، وبدون تغيير المجموعة المشاركة Bx ومن ثم إثبات أن هذا التعويض لا يؤثر على الجانب الأيمن في العلاقة (7). بما أن $B \subseteq A$ فإن $b \in A$ ومنه $Ax = A$ (مبرهنة 2-14) وعليه فإن $Abx = Ax$.

2. بعد ذلك سنرى أن φ هي تشاكل وذلك لأن:

$\varphi(Bx)\ \varphi(By) = (Ax)\ A(y) = (A\,x\,y) = \varphi(B\,x\,y)$

(لأن A سوية في G)

3. φ شاملة لأن x في العلاقة (7) هو عنصر لا على التعين في G (أي أنه يمثل جميع عناصر G).

لذا فإن جميع الجاميع المشاركة للزمرة الجزئية A في G تظهر في الجانب الأيمن من (7).

عليه:

$\varphi(G/B) = G/A$ ....(8)

4. والآن لنجد نواة φ (أي $\ker\varphi$). $Bx \in \ker\varphi$ إذا وفقط إذا $(A\,x) = (A)$، العنصر المحايد في G/A. وهذا يعني أن $x \in A$.

عليه فإن $\ker\varphi$ هو عبارة عن اتحاد الجاميع المشاركة (Ba)، لكل $a \in A$، بمعنى آخر:

$\ker\varphi = A / B$ ....(9)

وأخيراً، من (8) و(9) فإن شروط المبرهنة (4-9) متحققة. لذا فإن العلاقة (6) متحققة.

مبرهنة (4-10):

[مبرهنة التشاكل الثالثة] لتكن N زمرة جزئية سوية في G و H زمرة جزئية لا على التعيين في G.

فإن: $\frac{H}{H\cap N} \cong \frac{NH}{N}$

ملاحظة

قبل البدء ببرهان المبرهنة أعلاه نود أن نبرهن ما يأتي لتكن H و K زمر جزئية فإن المجموعة الجزئية HK زمرة إذا وفقط إذا $HK = KH$.

بما أن H و K زمر يكون لدينا $H^2 = H$ و $K^2 = K$ (السبب؟) نفرض $HK = KH$ و $S = HK$ إذن .

$$S^2 = HK\ HK = H^2K^2 = HK = S$$

لذا فإن قانون الانغلاق في S متحقق كما وأن العنصر المحايد $1 \in S$ (ما هو السبب؟)

إذا افترضنا أن $h \in H$ و $k \in K$ فإن $k^{-1}h^{-1} \in KH$، لكن $HK = KH$ لذا فإن $k^{-1}h^{-1} \in KH = S$ بمعنى آخر $(hk)^{-1} \in S$ وهذا يعني S زمرة.

وبالعكس : نفرض $S = HK$ زمرة ، فإذا كانت $h \in H$، $k \in K$، $hk \in S$ و $k^{-1}h^{-1} \in S$ كذلك $(h^{-1}k^{-1})^{-1} \in S$ فإن $kh \in S$، أي أن $HK \subset HK$.

إذا افترضنا أن $k^{-1}h^{-1} = h' k'$ حيث $h' \in H$ و $k \in K$ فإن

$(k^{-1}h^{-1})^{-1} = hk = k^{-1}h^{-1}$

أي أن $HK \subset KH$ إذن $HK = KH$

برهان المبرهنة:

لتكن $\theta : G \to G'$ تشاكل من الزمرة G الى الزمرة G' نفرض التطبيق $\theta_H : H \to G'$ وهو اقتصار θ على الزمرة الجزئية H في G معرف بالشكل

$\theta_H(h) = \theta\ (h)$

حيث $h \in H$

من المعروف أن في جميع التشاكلين زمرة الصور $H' = \theta_H(H)$

تكتب بالشكل المبسط $H' = \theta(H)$

هي زمرة جزئية في H'، بينما نواة $\theta(\ker\theta)$ تحتوي على جميع عناصر H الواقعة في نوارة θ أي $\ker\theta_H = H_n \ker\theta$.

سنتوسع قليلاً لتوضيح التشاكل الطبيعي المتباين $\tau : G \to G/N$ حيث $\tau(x) = (Nx)$.

عندما يشمل على الزمرة الجزئية H في G زمرة الصورة H' ستكون $H' = \tau(H) = \cup_H (Nh)$.

حيث h تشمل جميع عناصر H بجانب أمر H' هي زمرة جزئية في G/N وهي بالشكل $H' = B/N$.

حيث $N \subseteq B \subseteq G$ (لاحظ مبرهنة 4.9)

لاحظ أننا لا نستطيع في المرحلة الحالية القول بأن $B = H$ لأن H ليس ضرورياً تحتوي N حيث تصبح H/N بدون معنى لذا فإن $B = \cup Nh$.

(حيث $h \in H$)

أو $B = NH$

لاحظ أن B زمرة جزئية وذلك بما أن N سوية بالفرض وأن $Nh = hN$ لكل $h \in H$ عليه $NH = HN$.

استناداً لما جاء في أعلاه فإن B زمرة ولهذا فإن $\tau_H(H) = \dfrac{NH}{N}$

وبما أن $Ker\tau_H = N$ فإن $Ker\,\tau_H = H \cap N$

لذا $H \cap N$ سوية في H

وبواسطة مبرهنة (4.8) فإن $H / Ker\tau_H \cong \tau_H(H)$

وبتعويض العلاقات اعلاه سنحصل على $\dfrac{H}{H \cap N} \cong \dfrac{NH}{N}$

تعريف (4-11)

لكل $z, y \in G$,G زمرة، نعرف الكوميوتيتر بالشكل

$[x, y] = x^{-1}\, y^{-1}\, x\, y$

مجموعة جميع الكوميوتيترز في G تكوّن زمرة تسمى الزمرة المشتقة أو زمرة الكوميوتيترز في G، يرمز لها بالرمز G' وتعرف:

$G' = \{\, [x,y] : x, y \in G \,\}$ ....(10)

ملاحظة

حاصل ضرب عنصرين من G' ليس ضرورياً أن يكون كوميوتيتر وعليه فإن G' كتبناه بالصيغة (10)، أي أنه يتولد بواسطة جميع الكوميوتيترز في G.

من الواضح أن $[x, y]=1$ إذا وفقط إذا $x\,y = y\,x$ وأن $G' = \{1\}$ إذا وفقط إذا G ابيلية (هل تستطيع برهان ذلك؟).

مبرهنة (4-12):

1. الزمرة المشتقة G' سوية في G $(G' \lhd G)$ و G/G' أيلية.
2. إذا كانت H أي زمرة جزئية سوية في G حيث G/H أيلية ، فإن $G' \subseteq H$

البرهان:

1. لكي يكون $G' \lhd G$ يجب برهان أن لكل $t \in G$ فإن $[x, y]^t \in G'$.

بواسطة مثال (1): من 5-2، يكون لدينا:

$$[x, y]^t = [x^t, y^t]$$

ولما كان الطرف الأيمن هو كوميوتيتر فإنه ينتمي إلى G' وعليه $G' \lhd G$.

بعد ذلك سنبين أن الجاميع المشاركة $G'x$, $G'y$ متبادلة أو $[G'x , G'y] = G'$

$$\begin{aligned}[G'x , G'y] &= (G'x)^{-1} (G'y)^{-1} (G'x) (G'y) \\ &= G' x^{-1} y^{-1} x y \\ &= G' [x, y] \\ &= G'\end{aligned}$$

لأن $[x,y] \in G'$ عليه فإن G/G' أيلية.

2. نفرض $H \lhd G$. إذن بالإمكان استعمال الحسابات الواردة في (1) من خلال وضع H بدلاً من G' وسنجد أن:

$$[H x , H y] = H [x, y]$$

وعندما تكون G/G'أيلية، فإن الجانب الأيسر سيكون مساوياً إلى العنصر المحايد لـG/H، أي يساوي H، لذا $[x, y] \in H$. بما أن x و y عنصرين لا على التعين فإن مولدات G' تقع في H، لذلك $G' \subseteq H$.

مبرهنة (4-13):
لتكن H و K زمر جزئية سوية في G بحيث $H \cap K = \{1\}$. فإن كل عنصر من H يتبادل مع كل عنصر في K.

البرهان:

نفرض أن $z = h^{-1} k^{-1} h k$، حيث h , k عناصر لا على التعين في H و K على التوالي. بما أن $H \lhd G$ فإن $h_1 = k^{-1} h k \in H$ ولذا $z = h^{-1} h_1 \in H$.
بنفس الطريقة بالنسبة إلى K فإن $z \in K$.

عليه $z \in H \cap K = \{1\}$ لذلك $z = 1$، أي أن $hk = kh$.

درسنا في (4-1) بشيء من الإيجاز التشاكل وقلنا أن التشاكل θ يسمى تشاكل تقابلي ذاتي داخلي إذا تحققت الشروط الآتية:

1. θ تشاكل.
2. θ متباينة وشاملة.
3. $G = G'$.
4. θ هي علاقة ترافق.

سنحاول الآن دراسة هذا النوع من التشاكلات بشيء من التفصيل. إذا كانت كل من β, τ تشاكل بواسطة الترافق بحيث

$$\propto \beta : G \to G$$

معرفة بالشكل:

$$\propto \beta (x) = \propto (\beta x)$$

حيث $x \in G$، فإن مجموعة جميع التشاكلات على G تكوّن زمرة، تكتب بالشكل $A(G)$، وتسمى زمرة التشاكلات التقابلية الذاتية بواسطة الترافق. حيث أن العنصر المحايد في G هو العنصر المحايد i في $A(G)$ والذي يثبت كل عنصر في G، أي:

$$(x \in G) \quad i(x) = x \quad \text{.....(11)}$$

معكوس $\propto$ هو $\propto^{-1}$. لذا فإن $\propto^{-1}(x)$ هو عنصر وحيد مثل y في G بحيث $\propto(y) = x$. لاحظ أن هذا العنصر موجود لكل x لأن $\propto$ شاملة. وبما أن $\propto$ متباينة فإن $\ker \propto = \{1\}$، هذا يعني أن $\propto$ تحافظ على رتبة كل عنصر لأنه إذا كانت $y = \propto(x)$ و $x^n = 1$ فإن:

$1 = \propto(x^n) = [\propto(x)]^n = y^n$ (بسبب كون $\propto(xy) = \propto(x)\propto(y)$) عليه فإن x وy لهما نفس الرتبة.

باختيار $t \in G$ يمكننا اختيار التطبيق τ المرافق لها بحيث:

$$\tau : G \to G$$

المعرفة:

$$(x \in G) \quad \tau(x) = t^{-1} x t = x' \quad \text{.....(12)}$$

بواسطة مثال (1) من (2-5) فإن τ تشاكل من G لنفسه وبالحقيقة هي تشاكل تقابلي ذاتي داخلي. لأنه إذا كان $x' = 1$ فإن $x = 1$ لهذا فإن نواة τ هي $\{1\}$ لذا فإن τ متباينة. وعندما $y \in G$ فإنه يوجد $x \in G$ بحيث $x' = y$، أي $x = t y t^{-1}$، بمعنى آخر τ شاملة.

عليه فإن τ في العلاقة (12) الحادثة من الترافق تسمى التشاكل التقابلي الذاتي الداخلي.

نفرض $I(G)$ مجموعة جميع التشاكلات الداخلية. سنبرهن أن $I(G)$ تكون زمرة تحت العملية التركيبية للتطبيق. لتكن σ تشاكل داخلي معرفة بالشكل:

$\sigma(x) = r^{-1} x r$ (حيث $x \in G$)

لذا:

$$\tau\sigma(x) = \tau(r^{-1} x r) = t^{-1} r^{-1} x r t = (r t)^{-1} x (r t)$$

أي أن:

$$(x^r)^t = x^{rt} \quad \text{.........(13)}$$

لذا فإن تركيب التطبيق $\tau\sigma$ يقابل الترافق بواسطة $r t$، هذا يعني أن قانون الانغلاق متحقق داخل $I(G)$. واضح أن $i \in I(G)$ من خلال فرض $t = 1$ و τ^{1} تقابل الترافق بواسطة t^{-1}. أي:

$$\tau^{-1}(x) = t x t^{-1} = (t^{-1})^{-1} x t^{-1}$$

عليه فإن $I(G)$ زمرة.

مبرهنة (4-14):
ليكن $Z(G)$ مركز G، فإن:

$$I(G) \cong G / Z(G)$$

البرهان:

نعرف $\varphi : G \to I(G)$ بالشكل:

$$\varphi(t) = \tau \quad \text{(حيث } t \in G\text{) ....(14)}$$

و τ تشاكل داخلي مستحدث بواسطة t.

φ تشاكل لأن العلاقة (12) تعطينا:

$$\varphi(r t) = \varphi(r)\ \varphi(t)$$

كذلك φ شامل لأن أي تشاكل داخلي نحصل عليه من عمل φ على عنصر مناسب في G. لذا:

$$\varphi(G) = I(G)$$

والآن نجد نواة φ. نحن نعلم أن $t \in \ker\varphi$ إذا وفقط إذا كان التشاكل الداخلي المستحدث بواسطة t هو التشاكل الأحادي:

$$(x \in G) \quad x^t = x$$

هذه العلاقة تكافئ العبارة $t \in Z(G)$. لهذا $\ker\varphi = Z$. وبواسطة مبرهنة التشاكل الأولى فإن:

$$I(G) \cong G / Z(G)$$

مثال (2)

نفرض $G = \langle x, y : x^2 = y^2 = 1, y\,x = x\,y \rangle$ زمرة رتبتها 4، لذا فإن هذه الزمرة تحتوي على ثلاث عناصر رتبة كل منها تساوي 2، والتي يمكن ترتيبها بواسطة ∝. لذا فإن كل ترتيبة من الترتيبات الست تكون تشاكل ذاتي، لأنه إذا افترضنا أن العناصر الثلاث هي z, y, x، فإن $x\,y = z$ لذا إذا كانت $\propto(x) = x'$, $\propto(y) = y'$, $\propto(z) = z'$ فإننا نحصل على $x'\,y' = z'$ يتبع من ذلك أن G لها ستة تشاكلات داخلية. عليه فإن $A(G) = S_3$ (لاحظ 3-1)

تعريف (4-15)

الزمرة الجزئية H في الزمرة G تسمى الزمرة المميزة إذا لم تتغير H تحت تأثير جميع التشاكلات التقابلية الذاتية (H ثابتة).

مثال (3)

مركز الزمرة $Z(G)$ هو زمرة مميزة، لأنه إذا $z \in Z(G)$ فإن $zx = xz$ لكل $x \in G$. عليه فإن لكل $\alpha \in A(G)$، $\alpha(z)\alpha(x) = \alpha(x)\alpha(z)$، لكن α شاملة، $\alpha(x)$ يمكن أن تساوي أي $y \in G$.

لذا $\alpha(z)y = y\alpha(z)$ لكل $y \in G$، أي أن:

$$\alpha Z(G) \subset Z(G)$$

والعكس أيضاً صحيح $Z(G) \subset \alpha Z(G)$، من خلال تبديل α بـ α^{-1}.

إذن:

$$\alpha Z(G) = Z(G)$$

تمرين

برهن أن جميع الزمر المميزة سوية في G.

مبرهنة (4–16):

إذا كانت $N \lhd G$، حيث N زمرة جزئية، وH زمرة جزئية مميزة في N، فإن $H \lhd G$.

البرهان:

لتكن $t \in G$ لذا فإن التطبيق τ المعرف في (12) هو تشاكل ذاتي لـN. لذا وبما أن $\tau(H) = H$، لأن H مميزة في N، فإن $t^{-1}Ht = H$، أي أن $H \lhd G$.

تمارين محلولة

1. لتكن $G = Z$ و $G' = nZ$، حيث Z مجموعة الإعداد الصحيحة نعرف التطبيق f بين الزمرتين الجمعيتين Z و nZ بالشكل:

$$f(m) = nm$$

حيث $m \in Z$.

برهن أن f تشاكل.

البرهان: لتكن $m_1, m_2 \in Z$. لذا فان.

$$f(m_1 + m_2) = n(m_1 + m_2)$$
$$= nm_1 + nm_2$$
$$= f(m_1) + f(m_2)$$

اذن f تشاكل

2. نفترض $G = Z$ و $G' = Z \times Z$ زمر جمعية ولتكن $f : G \to G'$ تطبيق من G الى G' معرف بالشكل:

$$f(n) = (n, o)$$

برهن أن f تشاكل.

البرهان

لتكن $n_1, n_2 \in Z$ فان

$$f(n_1 + n_2) = (n_1 + n_2, o)$$
$$= [(n_1, o) + (n_2, o)]$$
$$= f(n_1) + f(n_2)$$

أذن f تشاكل لكنها ليست شاملة

3. إذا كانت $f:Z\to Z$ حيث $f(m)=-m$ فإن f تشاكل متباينة وشاملة.

البرهان:

نفرض أن $m_1,m_2\in Z$ لذا فإن:

$$\begin{aligned} f(m_1+m_2) &= -(m_1+m_2) \\ &= -m_1-m_2 \\ &= f(m_1)+f(m_2) \end{aligned}$$

∴ f تشاكل

نفرض $f(m_1)=f(m_2)$

إذن $-m_1=-m_2$ ، وعليه فإن $m_1=m_2$

إذن f متباينة

وأخيراً بما أن m عنصر لأعلى التعين في Z فإن f شاملة.

4. لتكن $f:G\to G$ تطبيق معرف بالشكل

$f(g)=t^{-1}gt$ حيث $g\in G$ عنصر معين في G و $t\in G$

برهن أن f تشاكل تقابلي ذاتي.

البرهان:

نفرض $g_1\ ,\ g_2\in G$

إذن

$$\begin{aligned} f(g_1+g_2) &= t^{-1}(g_1+g_2)t \\ &= t^{-1}g_1t+t^{-1}g_2t \\ &= f(g_1)+f(g_2) \end{aligned}$$

إذن f تشاكل

لتكن $f(g_1)=f(g_2)$

إذن $t^{-1}g_1t=t^{-1}g_2t$ (بالتعريف)

لذا

$tt^{-1}g_1tt^{-1}=tt^{-1}g_2tt^{-1}$ (بالضرب في t من جهة اليسار و t^{-1} من جهة اليمين)

وعليه فإن $g_1 = g_2$

إذن f متباينة

لما كان g عنصر لأعلى التعين فإن f شاملة.

f هذه تسمى تشاكل تقابلي ذاتي لانها عبارة عن ترافق

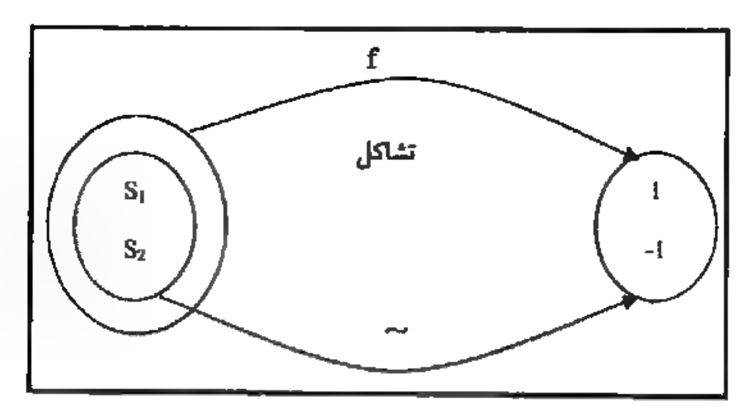
5. نفرض $f : Z \to \{1,-1\}$ تشاكل، حيث Z زمرة جمعية و $\{1,-1\}$ زمرة ضربية وأن:

$$f(m)=\begin{cases} 1 & \text{اذا m عدد زوجي} \\ -1 & \text{اذا m عدد فردي} \end{cases}$$

حقق صحة المبرهنة (4.8)

البرهان :

لتكن S_1 مجموعة الاعداد الصحيحة الفردية و S_2 مجموعة الاعداد الزوجية واضح أن $Kerf = S_2$ وأن:



$$Z / Kerf = Z / S_2$$
$$= \{S_1, S_2\}$$

وعليه فإن $\{S_1,S_2\} \cong \{1,-1\}$، حيث $\cong$ تشاكل تقابلي

ملاحظ: f تشاكل شامل (لماذا؟)

تمارين الفصل الرابع

1. إذا كانت الدالة $\varphi : G \to G$ شـاملة بحيـث: $\varphi(x) = x^{-1}$ بـرهن أن φ تـشاكل تقابلي ذاتي إذا وفقط إذا G أبيلية.
2. لتكن $\varphi : G \to G'$ دالة بين الزمرتين G و G' معرفة بالشكل: $\varphi(x) = 1'$ لكل $x \in G$ فإن $1' \in G'$ هو العنصر المحايد.
3. نفرض $\varphi : Z \to Z$ دالة معرفة بالشكل

$\varphi(x) \to 2x$

لكل $x \in Z$. برهن أن φ تشاكل تحت عملية الجمع. هـل أنها تـشاكل تحـت عملية الضرب ولماذا؟

الفصل الخامس

زمرة الترتيبات

الفصل الخامس

زمرة الترتيبات

Permutation Group

درسنا في الفصل الأول زمرة الترتيبات بشيء من الإيجاز، سنحاول في هذا الفصل التوسع في هذا النوع من الزمر وذلك لأهميتها النظرية والتطبيقية.

5-1 صفوف الترافق في S_n Conjugacy Classes

تعريف (5-1)

لتكن X مجموعة منتهية غير خالية، فإن الترتيبة (تسمى تبديلة أحياناً) f على X هي دالة $f : X \to X$ بحيث f متباينة وشاملة.

ملاحظة

إذا كانت f و g دالتين من X إلى X فإن تركيبهما fg هو دالة تعرف بالشكل:

$f\,g\,(x) = f\,(g\,(x))$ ....(1)

لكل $x \in X$. الدالة هذه (أي الترتيبة) متباينة وشاملة.

مثال (1)

مجموعة جميع الترتيبات المعرفة على X هي زمرة تحت عملية الضرب لأن الضرب هي عملية ثنائية كذلك فإن تركيب الدوال تجميعية. أما الدالة الأحادية فتعرف $I : X \to X$ حيث $I\,(x) = x$ لكل x في X هي العنصر المحايد، وأخيراً إذا كانت f ترتيبة معرفة على X فإن f^{-1} هي معكوس f وهكذا فإن مجموعة الترتيبات المعرفة على X تكوّن زمرة.

إذا كانت عناصر المجموعة المنتهية X أعداد صحيحة $1, 2, 3, ..., n$ فإن مجموعة جميع الترتيبات الواردة في المثال (1) تسمى زمرة التناظر ويرمز لها بالرمز S_n (لاحظ الفصل الأول عندما $n = 3$). يمكن تمثيل الترتيبة التي درجتها n بالشكل:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3....j....n \\ \\ x_1 & x_2 & x_3...x_j...x_n \end{pmatrix} \text{...(2)}$$

حيث $x_j = f(j)$ هي صورة j بتأثير f.

لاحظ أن الصف الثاني في العلاقة (2) هو إعادة ترتيب الأعداد $1, 2, ..., n$.

تمرين

برهن أن عدد الترتيبات هي $n!$ (مضروب n).

من الممكن اختزال العلاقة (2) بالشكل المبسط التالي:

$$f = \begin{pmatrix} j \\ x_j \end{pmatrix} \text{..(3)}$$

وللزيادة في التبسيط نفرض:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3...n \\ 1' & 2' & 3'...n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \\ j' \end{pmatrix} \text{...................................?....(4)}$$

حيث $1', 2', ..., n'$ نسبة إلى g. لذا نستطيع الآن تكوين العلاقة:

$$g = \begin{pmatrix} x_j \\ x'_j \end{pmatrix} \text{..(5)}$$

لاحظ أن السطر الأول في (5) هوا لصف الثاني للعلاقة (2).

عليه:

$$g^{-1} f g = \begin{pmatrix} j' \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ x_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ x'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j' \\ x'_j \end{pmatrix} \text{..................................(6)}$$

نستطيع القول أن للحصول على $g^{-1}f\,g$، نؤثر على كل رمز في f بـ g، بمعنى آخر، نؤثر على كلا الصيغتين في f، أي:

$$g^{-1}f\,g = \begin{pmatrix} g\,(j) \\ g\,(x_j) \end{pmatrix}$$

مثال (2)

نفرض أن $n = 4$ و $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. إذن بتأثير g على كل رمز في f نجد: $g^{-1}f\,g = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

الآن نستطيع تطبيق الطريقة أعلاه على الدورة التي درجتها k، أي:

$$\gamma = (x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_k \\ x_2, & x_3, \ldots, & x_{k-1}, & x_1 \end{pmatrix}$$

وباستخدام العلاقة (6):

$$g^{-1}\,\gamma\,g = \begin{pmatrix} x'_1, & x'_2, & \ldots, & x'_k \\ x'_2, x'_3, \ldots, x_k, x_1 \end{pmatrix} = (x'_1\, x'_2 \ldots x'_k)$$

أو

$$g^{-1}\,\gamma\,g = (g\,x_1 \;\; g\,x_2 \;\; \ldots \; g_k\;x_k) \qquad \ldots\ldots (7)$$

لذا فإن أي ترتيبة f يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب دورات منفصلة عن بعضها:

$$f = \partial_1 \partial_2 \;\ldots\; \partial_r \qquad \ldots\ldots (8)$$

حيث $\partial_1\,, \partial_2, \ldots, \partial_r$ دوران منفصلة عن بعضها وتحتوي على:

$$m_1,\; m_2,\; \ldots,\; m_r, \qquad \ldots\ldots (9)$$

من العناصر على التوالي.

الأعداد في (9) تسمى نموذج الدورة للترتيبة f. لهذا فإن جميع النماذج للزمرة التناظرية S_n هي عبارة عن تقابل متباين (1-1) لمجاميع الأعداد في (9) والتي تحقق الشرطان:

$1 \le m_1 \le m_2 \le \dots \le m_r$ .1
$m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$ .2 ....(10)

إذا كانت f تحتوي على t_1 من الدوران ذي الدرجة (1) و t_2 دورة درجتها (2) وهكذا t_m ذي الدرجة m، فإن f التي تحتوي على m من الدوران يمكن كتابتها بالأعداد الغير صفرية بالشكل:

$t_1, \ t_2, \ \dots, t_m$

التي تحقق العلاقة:

$t_1 + 2\,t_2 + \dots + m\,t_m = n$ ....(11)

مبرهنة (2-5):
أي ترتيبتين في S_n مترافقتين إذا وفقط إذا لهما نفس الرمز الدوري.

البرهان:

لتكن f ترتيبة يمكن تحليلها لمجموعة من الدورات المنفصلة عن بعضها، أي

$f = \partial_1 \partial_2 \dots \partial n = (x_1 \ x_2 \dots)(y_1 \ y_2 \dots)\dots(w_1 \ w_2 \dots)$

حيث درجة ∂_i هي m_i وإن

$m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$

إذا كانت g ترتيبة لا على التعين (لاحظ 4)، فإن:

$$\beta = g^{-1} f g = (g^{-1}\partial_1 g)(g^{-1}\partial_2 g)\dots(g^{-1}\partial_n g)$$
$$= (x_1' x_2' \dots)(y_1' y_2' \dots)\dots(w_1' w_2' \dots)$$
$$= \partial_1'\partial_2'\dots\partial_r'$$

حيث ∂_1' , ∂_2' , ... , ∂_r' دورات منفصلة عن بعضها، لأن g تطبيق متباين، لذا فإن β لها نفس النموذج الدوري كما هي f.

نفرض العكس: إذا كانت f و β لهما نفس النموذج الدوري فإن الترتيبة:

$$g = \begin{pmatrix} x_1\, x_2 \dots y_1\, y_2 \dots w_1\, w_2 \dots \\ x_1'\, x_2' \dots y_1'\, y_2' \dots w_1'\, w_2' \end{pmatrix}$$

تمتلك الخاصية:

$$g^{-1} f g = \beta$$

عليه إذا كانت S_n تحتوي على k من صفوف الترافق فإن k تساوي عدد تجزئة n الموجود في المجموع العددي الوارد في (9) .

مثال (3)

أوجد صفوف الترافق في S_3.

الحل: صفوف الترافق هي:

1^3	(1 2)	3
(1) (2) (3)	(1) (2 3)	(1 2 3)
	(2) (1 3)	(1 3 2)
	(3) (1 2)	

لذا فإن التجزئة يمكن كتابتها بالشكل:

$1^{t_1}, 2^{t_2}, \dots, n^{t_n}$ ....(12)

من المركبات.

فمثلاً $1^3\,3\,4^2$ تمثل التجزئة:

$$1+1+1+3+4+4$$

للعدد 14.

مثال (4)

الترتيبة $(6\,7)\,(4\,5)\,(3)\,(2)\,(1)$ تقع ضمن التجزئة $1^3\,2^2$.

عندما $n=5$ فإن $(1\;2)$ تعطينا التجزئة:

$$1^5,\; 1^3\,2,\; 1^2\,3,\; 1\,2^2,\; 14,\; 23,\; 5$$

لإيجاد عدد العناصر في صف الترافق، يمكن استخدام المبرهنة التالية:

مبرهنة (3-5):

إذا كانت f تحوي على رمز دوري يتقابل مع التجزئة:

$$1^{t_1},\; 2^{t_2},\; \dots,\; n^{t_n}$$

فإن عدد الترتيبات التي تترافق مع f في S_n يساوي

$$h_f = \frac{n!}{(1^{t_1}\; t_1!)\;(2^{t_2}\; t_2!)\;\dots\;(n^{t_n}\; t_n!)} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(13)$$

حيث h_f هو دليل ممركز f في S_n.

البرهان:

من الممكن كتابة الرمز الدوري للترتيبة f بالشكل (العلاقة 12):

$$f = \underbrace{(\bullet)\,(\bullet)\,\dots\,(\bullet)}_{\text{من المرات } t_1}\;\; \underbrace{(\bullet\bullet)\,(\bullet\bullet)\,\dots\,(\bullet\bullet)}_{\text{من المرات } t_2}\;\; \dots \underbrace{(\bullet\bullet\dots\bullet)(\bullet\bullet\dots\bullet)(\bullet\bullet\dots\bullet)}_{\text{من المرات } t_n} \quad \dots(14)$$

نحن نعلم أن هناك $n!$ طريقة لترتيب n من الأعداد. نفرض أن t_j دورات من الدرجة j في العلاقة (14) $(1 \le j \le n)$، فإن هذه الـt_j من الدورات يمكن إعادة ترتيبها مع بعضها $t_j!$ بدون تغير عناصر S_n الناتجة.

لما كانت كل دورة في S_n تكتب بالشكل:

$$(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_j)$$

والتي يمكن كتابتها بعدد j من الطرق المختلفة وذلك لأن:

$$(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_j) = (x_2 \ x_3 \ \dots \ x_j x_1) = \dots = (x_j \ x_1 \ \dots \ x_{j-1})$$

عليه فإن كل عنصر في S_n يمكن عده $t_j! j^{t_j}$ من المرات. على العموم فإن هذا العنصر من صف الترافق لـf يتكرر:

$$1^{t_1} \ t_1! \ 2^{t_2} \ t_2! \ \dots \ n^{t_n} \ t_n!$$

من المرات.

لهذا فإن عدد العناصر في الصف هو h_f، ولما كان h_f هو دليل مركز f في S_n (لاحظ مبرهنة (3-3) فإن (13) تكون صحيحة.

مثال (5)

أوجد صفوف الترافق لزمرة التناظر S_4.

الحل: بما أن $n = 4$ وباستخدام الصيغة (12) فإن صيغة التجزئة هي:

$$1^4, \ 13, \ 2^2, \ 1^2 \, 2, \ 4$$

أي أن صفوف الترافق ستكون

1^4	1 3	2^2	$1^2\,2$	4
(1) (2) (3) (4)	(1) (2 3 4)	(1 2) (3 4)	(1) (2) (3 4)	(1 2 3 4)
	(1) (2 4 3)	(1 3) (2 4)	(1) (3) (2 4)	(1 2 4 3)
	(2) (1 3 4)	(1 4) 2 3)	(1) (4) (2 3)	(1 3 2 4)
	(2) (1 4 3)		(2) (3) (1 4)	(1 3 4 2)
	(3) (1 2 4)		(2) (4) (1 3)	(1 4 2 3)
	(3) (1 4 2)		(2) (4) (1 2)	(1 4 3 2)
	(4) (1 2 3)			
	(4) (1 3 2)			

مبرهنة (5-4):

لتكن f ترتيبية رمزها الدوري هونفس الصيغة الموجودة في (12) فإن رتبة مركز f في S_n هي

$$\left|C_{S_n}(f)\right| = 1^{t_1}\ t_1!\ 2^{t_2}\ t_2!\ldots\ t_n\ t_n! \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (15)$$

البرهان:

عرفنا من مبرهنة (5-3) إن h_f هو دليل المركز للترتيبية f في الزمرة S_n. عليه فإن (15) تكون صحيحة.

مثال (6):

الترتيبية $f = (12)\ (3)\ (4)\ (5)$ هي إحدى عناصر S_5 وتقع ضمن صف الترتيبة المتمثلة بالتجزئة $1^3\,2^1$، إذن:

$$\left|C(f)\right| = 2^1 1!\ 1^3 3! = 12$$

وهي الترتيبات:

(1) (2) (3) (4) (5)	(1 2) (3) (4) (5)
(1) (2) (3) (4 5)	(1 2) (3) (4 5)
(1) (2) (4) (3 5)	(1 2) (4) (3 5)
(1) (2) (5) (3 4)	(1 2) (5) (3 4)
(1) (2) (3 4 5)	(1 2) (3 4 5)
(1) (5) (3 5 4)	(1 2) (3 5 4)

مثال (7)

لتكن $C=(1,2,3,\dots,n)$ دورة عدد عناصرها n. لذا فإن:

$$t_n=1,\quad t_1=t_2=\dots=t_{n-1}=0$$

عليه فإن رتبة مركزها تساوي n. [لاحظ الصيغة (14)]

5-2 الدورات الثنائية Two Cycle

تعريف (5-5)

يسمى الترتيب الذي درجته 2، أي، الترتيب الذي يتكون من دورة واحدة طولها 2 وبقية الدورات طولها 1، ترتيباً ثنائياً. بمعنى آخر، هو الترتيب الذي يثبت جميع العناصر عدا عنصرين.

ملاحظة

الترتيب الثنائي يقع دائماً ضمن صف الترتيب الممثل بالتجزئة $2\ 1^2$.

مثال (1)

1. الترتيبة الثنائية في S_3 هي:

(1) (2 3)
(2) (1 3)
(3) (1 2)

وجميعها تمثل بصف التجزئة 2 1.

2. أما الترتيبة الثنائية في S_4 هي:

(1) (2) (3 4)
(1) (3) (2 4)
(1) (4) (2 3)
(2) (3) (1 4)
(2) (4) (1 3)
(3) (4) (1 2)

وجميعها ترتيبات ثنائية ضمن صف الترافق $1^2\ 2$.

ملاحظة

عدد الترتيبات الثنائية في S_n هو: $\frac{n(n-1)}{n}$

> **مبرهنة (5-6):**
> كل ترتيبة يمكن تمثيلها بشكل هو عبارة عن حاصل ضرب ترتيبات ثنائية.

البرهان:

كل ترتيبة يمكن كتابة رمزها الدوري على شكل دورات، كل دورة يمكن تمثيلها على شكل حاصل ضرب ثنائيات بالشكل:

$$(x_1\ x_2\ \dots\ x_n) = (x_1\ x_2)\ (x_1\ x_3)\ \dots\ (x_1\ x_n)$$

مثال (2)

الترتيبات (1 2 3) (4)و (1 4 2 3) يمكن كتباتها بالشكل:

$$(1 2 3) = (12)(13)$$
$$(1 4 2 3) = (14)(12)(13)$$

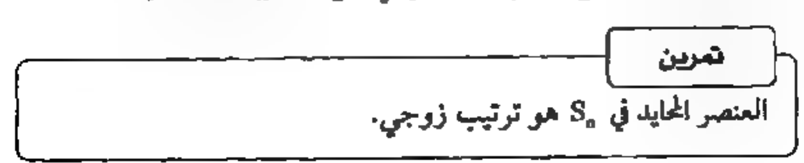
نستطيع الآن القول بأن الزمرة المتناظرة S_n يمكن تكوينها (توليدها) من $(n-1)$ من الترتيبات الثنائية:

$$(12), (13), \dots, (1n)$$

تعلمنا من الفصل الأول أن عناصر S_n تتوزع إلى مجموعتين متساويتين، المجموعة الأولى تسمى مجموعة العناصر الفردية وهي ليست زمرة لأنها لا تحتوي على العنصر المحايد، أما المجموعة الثانية فتضم العناصر الزوجية وهي تكوّن زمرة تسمى بالزمرة المتناوبة (أو المتذبذبة) وتكتب بالشكل A_n.

تعريف (7-5)

الترتيب الزوجي هو ذلك الترتيب الذي يمكن كتابته بشكل حاصل ضرب عدد زوجي من الترتيبات الثنائية، أما الترتيب الفردي فهو الترتيب الذي يمكن كتابته كحاصل ضرب عدد فردي من الترتيبات الثنائية.



تمرين

العنصر المحايد في S_n هو ترتيب زوجي.

مثال (3)

نفرض:

$x = (1\ 2\ 3)\ (4)\ (5)$ $\qquad$ $z = (1\ 2\ 3\ 4)\ (5)$

$y = (1\ 2)\ (4\ 5)\ (3)$ $\qquad$ $t = (1\ 2)\ (3)\ (4)\ (5)$

لاحظ أن x و y ترتيبات زوجية والترتيبات z و t ترتيبات فردية وذلك لأن:

$y = (1\ 2)\ (4\ 5)\ ,\ x = (1\ 2)\ (1\ 3)$

تمرين

برهن أن xy ترتيب زوجي.

كما أن z و t ترتيبات فردية لأن:

$t = (1\ 2)\ ,\qquad z = (1\ 2)\ (1\ 3)\ (1\ 4)$

$$zt = (12)(13)(14)(12)$$
$$= (13)(14)$$

إذن zt ترتيب زوجي.

مبرهنة (5-8):

يمكن توليد (تكوين) A_n ،$n \geq 3$، بالترتيبات:

$$(123), (124), ..., (12n)$$

البرهان:

درسنا في مبرهنة سابقة بأن أي ترتيبة يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب ترتيبات ثنائية من الشكل (li) . لما كانت كل ترتيبة زوجية يمكن كتابتها كحاصل ضرب عدد زوجي من الترتيبات الثنائية فإن A_n يمكن توليدها بالأزواج.

$$(1i)\ (1j)$$

وبما أن $(li)^2 = 1$ فإن باستطاعتنا افتراض أن في كل زوج يكون $i \neq j$.

والآن

$$(li)(lj) = (lij)$$

فإذا كانت $i = 2$، فإن الزوج من الترتيبات الثنائية تساوي إحدى الثلاثيات الموجودة في المبرهنة، كذلك عندما $j = 2$ فإننا نلاحظ أن :

$$(li)(l2) = (li2) = (12i)^2$$

وبصورة عامة عندما $i > 2$ و $j > 2$ فإننا سنستخدم العلاقة التالية:

$$(lij) = (12j)(12i)(12j)^{-1}$$

لذا ففي جميع الاحتمالات فإن الجانب الأيمن من العلاقة $(li)(lj) = (lij)$ يمكن التعبير عنه بدلالة المولدات في المبرهنة.

5-3 الزمر المتعدية في Transitive Groups S_n

سنتكلم في هذا الجزء عن الزمرة الجزئية G في زمرة الترتيبات التي تؤثر على المجاميع $\{1, 2, 3, ..., n\}$ أو $a, b, c, ...$

تعريف (5-9)

يقال للزمرة الجزئية G في S_n بأنها زمرة متعدية إذا أعطينا زوج من العناصر x وy فإنه توجد على الأقل ترتيبة واحدة في G والتي تنقل x إلى y، عدا ذلك يقال لها زمرة ليست متعدية.

ملاحظة

نرمز للترتيبة التي تنقل العنصر x للعنصر y بالرمز τ_{xy}. لاحظ أن τ_{xy} تنقل y إلى x.

مثال (1)

الزمرة الجزئية في S_4

$G = \{1, (12), (34), (12)(34)\}$

التي رتبتها 4 هي زمرة ليست متعدية وذلك لأنها لا تحوي على ترتيبة تنقل 1 إلى 3. بينما الزمرة:

$G' = \{I, (12), (34), (13)(24), (14)(23)\}$ متعدية.

تعريف (5-10)

زمرة الترتيبات التي تثبت العنصر x، وتكتب بالشكل G_x تسمى الزمرة G التي تثبت x.

مجموعة الترتيبات في S_n التي تثبت كل عنصر من عناصر المجموعة A تكوّن زمرة تسمى الزمرة المثبتة لعناصر A وتكتب $G_{[A]}$، وتعرف بالشكل:

$$G_{[A]} = \{ \tau \in G : \tau(x) = x ;\ \forall x \in A \}$$

أما التي تثبت A كمجموعة فتعرف بالشكل:

$$G_{(A)} = \{ \tau \in G : \tau(x) \in A ;\ \forall x \in A \}$$

مثال (2)

في الزمرة S_4

$$G_{(1,2)} = \{ 1, (3\ 4), (1\ 2), (1\ 2)(3\ 4) \}$$
$$G_{[1,2]} = \{ 1, (3\ 4) \}$$
$$G_2 = \{ 1, (3\ 4), (1\ 4), (1\ 3), (1\ 3\ 4) \}$$

تعريف (5-11)

زمرة الترتيبات G على المجموعة X تسمى ثنائية التعدي إذا لكل (x, y) ، (x_1, y_1) توجد ترتيبة $\tau \in G$ بحيث أن:

$$\tau(y) = y_1, \qquad \tau(x) = x_1$$

وبصورة عامة: G نونية التعدي إذا وجدت $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ و$\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ في X بحيث:

$$(i = 1, 2, ..., n) \qquad \tau(x_i) = y_i$$

تمرين

برهن إذا كانت G ثنائية التعدي فإن G_a مرة متعدية وإن:

$$|G| = n.\ |G_a| = n(n-1)\ |G_{[a,b]}|$$

نرمز $g(a) = a^g$ حيث $g \in G$ ، $a \in X$.

مبرهنة (5-12):
$|G| = |a^G| \cdot |G_a|$ حيث $a^G = \{a^g : g \in G\}$ ، G_a مثبت a في G

البرهان: بما أن

$$a^g = a^h \Leftrightarrow a^{gh^{-1}} = a \Leftrightarrow g h^{-1} \in G_a \Leftrightarrow g \in G_a h$$

(حيث $G_a h$ مجموعة مشاركة).

فإن عدد العناصر في a^G هو نفس عدد المجموعات المشاركة اليمنى $G_a h$ في G. أي:

$$|a^G| = [G, G_a] = \frac{|G|}{|G_a|}$$

تمرين

برهن أن $[G:G_{[a,b]}] = |a^G| \quad |b^{G_a}|$

مبرهنة (5-13):
كل زمرة منتهية تتشاكل تقابلياً مع زمرة ترتيبات.

البرهان: نفرض أن:

$G = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ زمرة رتبتها n.

لذا فإن:

$$G_x = \{b_1 x, b_2 x, ..., b_n x\} = G$$

حيث $x \in G$ لأن G زمرة.

إذا افترضنا أن h دالة معرفة بالشكل:

$$h(x)=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1x & b_2x & \dots & b_nx \end{pmatrix}$$

$$h(y)=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1y & b_2y & \dots & b_ny \end{pmatrix}$$

فإن:

$$h(x\,y)=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1xy & b_2xy & \dots & b_nxy \end{pmatrix}$$

لذا:

$$\begin{aligned} h(x\,y) &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1x & b_2x & \dots & b_nx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1x} & b_{2x} & \dots & b_{nx} \\ b_{1xy} & b_{2xy} & \dots & b_{nxy} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1^x & b_2^x & \dots & b_n^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_{1y} & b_{2y} & \dots & b_{ny} \end{pmatrix} \\ &= h(x)\; h(y) \end{aligned}$$

إذن G تتشاكل مع زمرة ترتيبات.

تمرين

برهن أن h متباينة.

مبرهنة (5-14):

زمرة الترتيبات G من الدرجة n تكون متعدية إذا وفقط إذا دليل مثبت المدد1، هي G_1، هو n.

البرهان: برهان ⇐

من الفرض G تحتوي على الترتيبة:

$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}$ ....(1)

والتي تنقل 1 إلى n ,... ,2 ,1 على التوالي. المجاميع المشاركة

$G_1 \propto_{11}, G_1 \propto_{12}, ..., G_1 \propto_{1n}$ ....(2)

هي مجاميع واضحة وذلك لأن أي مجموعة من المجاميع $G_1 \alpha_{1i}$ تنقل 1 إلى I ولذلك فهي تختلف عن تلك التي في $G_1 \propto_{1j}$ حيث $i \neq j$.

ولكي نبرهن أن المجموعات في (2) هي قائمة المجموعة كاملة. لتكن $\beta \in G$ وإن β تنقل 1 إلى x. لذا $\beta \propto_{1x}^{-1} \in G$، عليه فإن $\beta_1 \propto_{1x}^{-1}$ تترك 1 بدون تغير، أي أن $\beta_1 \propto_{1x}^{-1} \in G$.

عليه $\beta \in G_1 \propto_{1x}$، والتي تبرهن أن اتحاد المجاميع الواردة في (2) هي الزمرة G كاملة.

عليه فإن $[G:G_1]=n$

برهان: $\Rightarrow$

نفرض دليل G_1 في G هو n ولتكن:

$G = G_1 \tau_1 \cup G_1 \tau_2 \cup ... \cup G_1 \tau_n$ ....(3)

هي تركيب المجاميع المشاركة لـG نسبة إلى G_1. سنبرهن في البداية أنه لا توجد اثنتان من الترتيبات:

$\tau_1, \tau_2, ... \tau_n$ ....(4)

لهما نفس التأثير على العدد 1. نأخذ العكس ونفرض أن τ_i, τ_j كليهما ينقلان 1 إلى x. لذا $\tau_i.\tau_j^{-1}$ تثبت 1، وعليه فإن $\tau_i.\tau_j^{-1} \in G$ ولذلك فإن $G_1 \tau_i = G_1 \tau_j$ (مبرهنة 14-2). وهذا غير ممكن إلا إذا كان $i = j$.

عليه فإن الترتيبات (3) ممكن اعتبارها، وبترتيب معين، الترتيبات الموجودة في (1). من الملائم ترتيب (3) بطريقة ما بحيث أن $\propto_{1i} = \tau_i$، حيث $i=1, 2, ..., n$

وأخيراً إذا كانت x و y أي رمزين فإن $\tau_x \tau_y^{-1}$ تنقل x إلى y نستنتج من ذلك بأن G متعدية.

مبرهنة (15-5):
رتبة الزمرة المتعدية من الدرجة n قاسمها n.

البرهان:

لأن رتبة الزمرة المنتهية تُقسم بواسطة دليل أي زمرة جزئية داخلها (مبرهنة لاكرانج).

مبرهنة (5-16):

رتبة الزمرة المتعدية التي تنقل k من الرموز والتي درجتها n قاسمها هو:

$$n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)$$

البرهان:

نفرض G زمرة متعدية تنقل k من الرموز. لتكن s هي عدد المجاميع المرتبة المتضمنة k من الرموز المختارة من n من الرموز التي تؤثر عليها G.

إذن:

$$s = n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)$$

بما أن G ينقل k من الرموز وH هي زمرة جزئية التي تثبت كل واحد من الرموز

$1, 2, \dots, k$

بواسطة مبرهنة (5-15) فإن دليل H في G يساوي s، المجاميع المشاركة لـH في G متباينة تقابلياً مع s من المجاميع التي تتضمن كل منها k من الرموز.

مثال (3):

في الزمرة A_4، المثبت للرمز 1 هو

$G_1 : 1,\ (2\,3\,4),\ (2\,4\,3)$

لذا فإن $[A_4 : G_1] = \frac{12}{3} = 4$، والتي تؤكد أن A_4 متعدية. الآن G_1 متعدية على 2, 3, 4 إذن مثبت 2 في G_1، ليكن G_{12}، يختزل إلى 1 ولذا فهو ذو دليل 3 في G_1. بما أن G_{12} ليست متعدياً على 3, 4 فإن A_4 ثنائي التعدي.

5-4 الزمر البدائية Primitive Groups

نفرض أن G زمرة متعدية وان ترتيبات G تؤثر على n من العناصر وترتبها بالشكل t من الصفوف وs من الأعمدة بحيث $n = ts$، أي بالشكل:

$$t \left\{ \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_s \\ b_1 & b_2 & \dots & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1 & z_2 & \dots & z_s \end{matrix} \right. \quad \text{من الصفوف}$$

s من الأعمدة

بحيث لا يمكن نقل أي عنصرين من صفين مختلفين إلى أي عنصرين من نفس الصف وبالعكس أي عنصرين من نفس الصف لا يمكن نقلهما لصفين مختلفين.

تعريف (5-17)

الزمرة التي تمتلك الخاصية أعلاه تسمى الزمرة اللابدائية والزمرة التي لا تمتلك مثل هذا النظام تسمى زمرة بدائية.

مثال (1)

الزمرة الدورية G المتولدة بواسطة العنصر(1 2 3 4) المتكونة من الترتيبات:

$\{ 1, (1 2 3 4), (1 3 2 4), (1 4 3 2) \}$

هي زمرة لا بدائية والنظام اللابدائي التابع هو:

$$\left.\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{matrix}\right]$$

الترتيبات الأربعة في G المذكورة أعلاه تبدل هذا النظام إلى:

$$\left.\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{matrix}\right], \left.\begin{matrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{matrix}\right], \left.\begin{matrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{matrix}\right], \left.\begin{matrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{matrix}\right]$$

على التوالي

تمرين

زمرة الترتيبات الثنائية التعدي دائماً زمرة بدائية.

مثال (2)

الزمرة

$$V_4 = C_2 \times C_2$$

$$V_4 = \{1,\ x,\ y,\ xy\}$$ أو

تسمى الزمرة الرباعية، تمتلك أكثر من نظام بدائي واحد حيث أن في حالة الزمرة V_4.

$$1,\ (12)\ (34),\ (13)\ (24),\ (14)\ (23)$$

أي واحد من الأنظمة

$$\left.\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}\right], \left.\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{matrix}\right], \left.\begin{matrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{matrix}\right]$$

هو نظام لا بدائي.

تمارين محلولة

1. اكتب $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&1&2&6&5\end{pmatrix}$ كحاصل ضرب عدد من الترتيبات الثنائية.

الحل:

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&1&2&6&5\end{pmatrix}$$
$$=(1\ 4\ 2\ 3)(56)$$
$$=(13)(12)(14)(56)$$

2. لتكن $\tau\in A_n$ حيث A_n زمره متنبلبة من الدرجة n حيث $n\geq 3$ فان τ يمكن تمثيلها كحاصل ضرب دورات ثلاثية، أي دورات متكونة من 3 أعداد صحيحة (مثلاً (ijk)).

الحل:

من الفرض يمكن تمثيل τ كحاصل ضرب عدد زوجي من الدورات الثنائية مثلاً:

$$\tau=t_1t_2...t_{2r}$$

حيث $t_i=(a_ib_i)$

اذا كانت $a_i\neq 1$ و $b_i\neq 1$ فان:

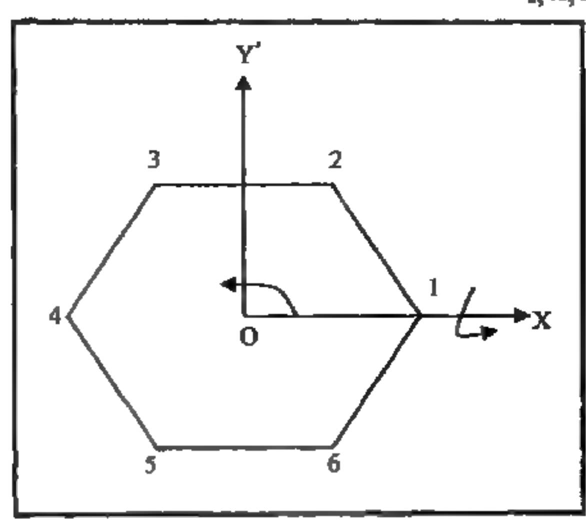
$$(a_ib_i)=(1b_i)(1a_i)(b_i)$$

واذا كانت $a_i=1$ أو $b_i=1$ تترك t_i كما هي. لذا فان في كلا الحالتين نلاحظ أن τ يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب عدد زوجي من الدورات الثنائية بالشكل $(1i)$.

عندما $(lij)=(li)(lj)$ حيث $i \neq j$ وبوضع ازواج $(li)(lj)$ حيث $i \neq j$ وترك الازواج المتتابعة من الشكل $(li)(lj)$ (لان ضربهما يساوي 1)، نلاحظ ان τ يمكن التعبير عنها بشكل حاصل ضرب دورات ثلاثية.

3. الشكل أدناه هو مضلع منتظم موضوع على المستوى xy . فإذا دورنا الشكل، بزاوية عكس دورات عقارب الساعة حول المحور Z- العمود على المستوى xy في النقطة O ، فسنحصل على 12 تدويرة فاذا كانت $\propto$ هي تدويرة بزاوية قيمتها $2\pi/n$ حيث n عدد رؤوس المضلع (أي 6) فسيكون لدينا 6 تدويرات هي:

$1, \propto, \propto^2, \ldots, \propto^5$



واذا افترضنا ان β هي انعكاس زاوية قيمتها π حول المحور X- ، أي أن $\beta^2=1$. لذا فإن العمليات التي عددها 12 هي:

$\propto^i \beta^j$

حيث $i=0,\ldots,5$ و $j=0,1$

يمكن وبسهولة ملاحظة أن $\propto\beta=\beta\propto^{-1}$ والتي تكافئ $(\propto\beta)^2=1$.

هذه الزمرة تسمى زمرة تناظر رتبتها 12 ويقال لها دايهدرال.

4. برهن أن عدد صفوف الترافق في S_n يساوي عدد طرق تجزئة n، حيث n عدد صحيح موجب.

البرهان:

لتكن $n_1, n_2, ..., n_r$ متتابعة من الأعداد الموجبة بحيث $n_1 \le n_2 \le ... \le n_r$ تمثل تجزئة n فإن f(n) يمكن ايجادها حيث.

$f(1) = 1$ لأن $1 = 1$ هي التجزئة الوحيدة للعدد 1.

$f(2) = 2$ لأن $2 = 2$ و $2 = 1 + 1$

$f(3) = 3$ لأن $3 = 3$ و $3 = 1 + 2$ و $3 = 1 + 1 + 1$.

$f(4) = 5$ لأن $4 = 4$ و $4 = 1 + 3$ و $4 = 1 + 1 + 2$ و $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ و $4 = 2 + 2$.

وهكذا $f(5) = 7$ و $f(6) = 11$ وهكذا.

نستطيع القول أن الترتيبة $\sigma \in S_n$ تمتلك الترتيب الدوري $\{n_1, n_2, ..., n_r\}$ إذا أمكن كتابتها كحاصل ضرب دورات منفصلة عن بعضها البعض اطوالها $n_1, n_2, ..., n_r$ بحيث $n_1 \le n_2 \le ... \le n_r$.

فمثلاً إذا كانت $\sigma \in S_n$ بحيث:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 132564798 \end{pmatrix}$$
$$= (1)(23)(456)(7)(89)$$

فإن σ تمتلك التركيب الدوري $\{1,1,2,2,3,\}$ والذي يحقق العلاقة $1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9$.

الآن إذا برهنا أن أي ترتيبتين σ و θ في S_n تكون مترافقة إذا وفقط إذا كان لكل منهما نفس التركيب الدوري فإن S_n تمتلك f(n) من صفوف الترافق.

ولبرهان ذلك سنعطي الطريقة الحسابية المبسطة التالية:

نفرض $\sigma\in S$ بحيث σ تنقل $i\to j$ و $\theta\in S_n$ تنقل $i\to s$ و $j\to t$ فإن $\theta^{-1}\sigma\theta$ تنقل $s\to t$ بمعنى آخر لحساب $\theta^{-1}\sigma\theta$ نستبدل كل رمز في σ بصورته تحت فعل θ.

على سبيل المثال لحساب $\theta^{-1}\sigma\theta$ حيث $\theta=(123)(47)$ و $\sigma=(567)(342)$ لاحظ أن θ تنقل: $5\to5$ و $6\to6$ و $4\to7$ و $1\to3$ و $7\to4$ و $3\to2$ وأن $\theta^{-1}\sigma\theta$ يمكن الحصول عليها من σ باستبدال 5 بـ5 و 6 بـ6 و 7بـ 4 و 3 بـ 1 و7 بـ 4 و 2 بـ 3. أي أن $\theta^{-1}\sigma\theta=(564)(173)$.

من خلال الحسابات أعلاه يصبح واضحاً أن الترتيبات تكون مترادفة أذا كانت تمتلك نفس الترتيب الدوري.

وبصورة عامة اذا كانت:

$$\sigma=(a_1,a_2,\dots,a_{n_1})(b_1,b_2,\dots b_{n_2})\dots(x_1,x_2,\dots x_{n_r})$$

و

$$\tau=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n_1})(\beta_1,\beta_2,\dots\beta_{n_2})\dots(\chi_1,\chi_2,\dots\chi_{n_r})$$

فإن:

$$\tau=\theta^{-1}\sigma\theta$$

حيث:

$$\sigma=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_{n_r} & b_1 & b_2 & b_{n_r} & x_1 & x_2 & x_{n_r} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_{n_r} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_{n_r} & \chi_1 & \chi_2 & \chi_{n_r} \end{pmatrix}$$

عليه فإن الترتيبات $(678)(345)(12)$ و $(428)(136)(75)$ مترافقة باستخدام ترتيبة الترافق

$$\begin{pmatrix} 12345678 \\ 75136248 \end{pmatrix}$$

تمارين الفصل الخامس

1. برهن أن S_n تتولد من:

$$(1\,2),\ (2\,3),\ \ldots,\ ((n-1),n)$$

2. برهن أن S_n تتولد من:

$$\beta=(1\ \ 2\ \ 3\ \ldots\ \ n)\ ,\quad \alpha=(1\,2)$$

3. جد مركز ومسوي x في S_4 حيث أن x هو:

   a. $x=(1\,2)\,(3\,4)$.

   b. $x=(2\,3\,4)$.

   c. $x=(1\,2\,3\,4)$

4. أوجد الزمر الجزئية غير الدائرية في D_4 , S_3 , A_4 ثم وضح أياً منها متعدية.

5. أوجد صفوف التكافؤ في A_5 , A_4 , S_5 , S_4 .

6. أوجد الزمر الجزئية $G_{(1,2)}$, $G_{[1,2]}$, G_1 عندما:

   a. $G=S_4$.

   b. $G=S_3$

الفصل السادس

مبرهنات سيلو



الفصل السادس

مبرهنات سيلو

Sylows Theorems

6-1 مبرهنات سيلو

تعلمنا من الفصول السابقة أنه إذا كانت رتبة G هي n فإن رتبة أي زمرة جزئية فيه تقسم n والعكس غير صحيح (مبرهنة لاكرانج). لقد قدم لنا العالم النرويجي سيلو حقيقة مهمة وهي:

إذا كانت p, p^{α} عدد أولي، تقسم رتبة G فإن G تحتوي على الأقل زمرة جزئية واحدة رتبتها p^{α}. قبل الدخول في دراسة هذه النتيجة والنتائج الأخرى التي برهنها سيلو نورد حقيقة مهمة للعالم الرياضي (فيلنت) وبدون برهان ويمكن للمهتمين متابعة ذلك في المراجع.

نتيجة فيلنت: إذا كانت G زمرة رتبتها n و p^{α} تقسم n، حيث p عدد أولي و α عدد صحيح موجب، فإن G تمتلك m من الزمر الجزئية التي رتبة كل منها p^{α} حيث m عدد صحيح موجب و $m \equiv 1(p)$.

تعريف (6-1)

لتكن G زمرة رتبتها n، نفرض أن $n = p^{\alpha} n'$، حين p عدد موجب أولي و $(n', p) = 1$، فإن أي زمرة جزئية في G رتبتها p^{α} تسمى زمرة سيلو من النمط p.

مثال (1)

نفرض $|G|=168$، لذا فإن $|G|=2^3, 3, 7$ لاحظ أن $(8, 21)=1$ وإن الزمرة الجزئية (على الأقل واحدة) التي رتبتها $8 = 2^3$ تسمى زمرة سيلو من النمط −2.

> **مبرهنة (6−2): (مبرهنة سيلو الأولى):**
> إذا كانت p^{α} هي أعلى قوة للعدد الأولي p تقسم رتبة G فإن G تحتوي على الأقل على زمرة جزئية واحدة رتبتها p^{α}.

مثال (2)

بالعودة للمثال (1) حيث:

$$|G|=168=2^3 .\ 3 .\ 7$$

فإن G تحتوي على الأقل على زمرة جزئية واحدة رتبتها 2^3 تسمى زمرة سيلو من النمط −2 وتحتوي على الأقل على زمرة جزئية واحدة رتبتها 3 تسمى زمرة سيلو من النمط −3 وأخيراً G تحتوي على زمرة جزئية واحدة رتبتها 7 تسمى زمرة سيلو من النمط −7.

مثال (3)

لتكن $G = S_3$. بما أن $|S_3| = 6 = 2 .\ 3$ فإن S_3 تحتوي على ثلاث زمر جزئية من الرتبة 2 كل منها تسمى زمرة سيلو من النمط −2 هذه الزمر هي:

$\{1, (1\,2)\}$
$\{1, (1\,3)\}$
$\{1, (2\,3)\}$

كذلك S_3 يحتوي على زمرة جزئية واحدة رتبتها 3 تسمى زمرة سيلو من النمط -3 وهي $\{1, (1 2 3), (1 3 2)\}$.

برهان (المبرهنة (6-2)):

حالة خاصة من نتيجة فيلنت. وهي تقابل أكبر قيمة ممكنة للأس α.

> **مبرهنة (6-3): (مبرهنة سيلو الثانية).**
>
> جميع الزمر السيلوفية الجزئية في G والتي تعود لنفس العدد الأولي p تكون مترافقة مع بعضها البعض داخل G.

مثال (4)

الزمر الجزئية السيلوفية $\{1, (2 3)\}$, $\{1, (1 3)\}$, $\{1, (1 2)\}$ في S_3 مترافقة مع بعضها وذلك لأن:

$$\begin{aligned}(1\ 2)\ \{1, 2\ 3)\}\ (1\ 2)^{-1} &= (1\ 2)\ \{1, (2\ 3)\}\ (1\ 2)\\ &= \{(1\ 2), (1\ 2\ 3)\}\ (1\ 2)\\ &= \{1, (1\ 3)\}\end{aligned}$$

وهكذا بقية الزمر الجزئية الأخرى.

مثال (5)

لتأخذ $G = A_4$ زمرة متذبذبة من الدرجة 4.

لما كان: $|A_4| = 2^2 . 3$

فإن A_4 تحتوي على أربعة من الزمر السيلوفية من النمط -3 هي:

$H_1 = \langle (1\ 2\ 3) : (1\ 2\ 3)^3 = 1 \rangle$

$H_2 = \langle (1\ 2\ 4) : (1\ 2\ 4)^3 = 1 \rangle$

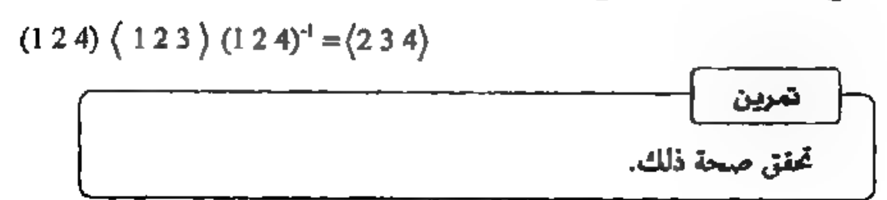
$H_3 = \langle (1\ 3\ 4) : (1\ 3\ 4)^3 = 1 \rangle$

$H_4 = \langle (2\ 3\ 4) : (2\ 3\ 4)^3 = 1 \rangle$

تمرين

تحقق من صحة ذلك.

جميع هذه الزمر مترافقة مع بعضها البعض لأن:



$(1\ 2\ 4)\ \langle\ 1\ 2\ 3\ \rangle\ (1\ 2\ 4)^{-1} = \langle 2\ 3\ 4 \rangle$

تمرين

تحقق صحة ذلك.

وهكذا بقية الزمر السيلوفية من النمط -3 مترافقة مع بعضها البعض.

وقبل البدء ببرهان المبرهنة الثانية لسيلو فإننا نحتاج الى ما يلي:

تعريف(4-6)

لتكن G زمرة منتهية و H و K زمر جزئية في G ، فإن المجموعة $H \times K$ تسمى المجموعة المشاركة المضاعفة لـ G نسبة الى H و K حيث

$(x \in G) HxK = \{hxk : h \in H, k \in K\}$

مبرهنة (فروبنيوس):

لتكن G زمرة منتهية رتبتها g ولتكن H و K زمر جزئية في G رتبة كل منهما α و b على التوالي، لذا توجد عناصر مثل t_1 ، t_2 ،…، t_r في G بحيث يتحقق ما يلي:

$G = Ht_1K \cup Ht_2K \cup .... \cup Ht_rK$ ....(1)

(أي أن G هو عبارة عن اتحاد المجاميع المشاركة المضاعفة والمفصولة عن بعضها)

وإن عدد العناصر في Ht_ik هو $\alpha b/d_i$ حيث

$$d_i = \left|t_i^{-1} Ht_i \cap k_i\right| \text{ .... } (2)$$

وعليه فإن:

$$g = \alpha b \sum_{i=1}^{r} d_i^{-1} \text{ .... } (3)$$

البرهان:

غير مطلوب ونتركه للدراسات المستقبلية.

برهان المبرهنة (3-6)

كمـا في التعريـف (1-6) نفـرض أن $|G| = P^{\alpha} g'$ حيـث $(g', p) = 1$ وأن H و K زمر جزئية رتبتها P^{α}. بواسطة مبرهنة فروبينيوس أعلاه فإن:

$$G = Ht_1 k \cup Ht_2 K \cup \ldots \cup Ht_r K$$

$$g = P^{2\alpha} \sum_{i=1}^{r} d_i^{-1} \text{ .... } (4)$$

$$d_i = \left|t_i^{-1} Ht_i \cap k\right| \text{ .... } (5)$$

بقسمة (4) على P^{α} سنحصل على

$$g' = P^{\alpha} \sum^{r} d_i^{-1} \text{ .... } (6)$$

لاحظ الآن d_i هي رتبة الزمرة الجزئية K، بمعنى آخر، هـي قـوة غـير سـالبة للعدد الأولي P. نستنتج من ذلك أن أي حد في الطرف الأيمـن مـن العلاقـة (6) إمـا يساوي 1 أو قوة موجبة للعدد الأولي P. لكن P ليس قاسماً لـ g'، فإن على الأقل يوجد حد واحد في الطرف الأيمن من (6) يجـب ان يـساوي 1 ولـيكن $P^{\alpha} d_j^{-1}$ بمعنـى آخر، $d_j = P^{\alpha}$ ولهذا سنحصل على :

$$P^{\alpha} = \left|t_j^{-1} Ht_j \cap K\right|$$

وبما أن رتبة كل من الزمر الجزئية H و K هي P^{α} في حالة كونهما متماثلين، لذا

$$K = t_j^{-1} H t_j$$

أي أن H و K مترافقين.

مبرهنة (6-5):

لتكن G زمرة منتهية فإن G تحتوي على زمرة سيلو وحيدة T تقابل العدد الأولي P إذا وفقط إذا T زمرة جزئية سوية في G.

البرهان:

واضح وحدانية الزمرة الجزئية T لأنها تقابل العلاقة $x^{-1}Tx = T$ لكل $x \in G$، وهذا يعني أن T سوية في G.

مبرهنة (6-6): [مبرهنة سيلو الثالثة]

ليكن r_p عدد زمر سيلو من النمط -p في G فإن:

$$r_p = 1 + kp$$

حيث r_p عدد صحيح موجب، وإن $r_p \mid |G|$. أي أن r_p تقسم رتبة G.

البرهان:

بواسطة نتيجة فيلنت نستنتج أن $r \equiv 1(p)$، ولكي نبرهن إن r_p تقسم n (رتبة G). نفرض

$$A = (p = p_1),\ p_2,\ \dots,\ p_n$$

هي مجموعة جميع زمر سيلو من النمط -p، عليه وبواسطة مبرهنة (6-3) فإن A هي مجموعة جميع الزمر المترافقة مع p.

إذن $r = [G: N(p)]$ (برهن ذلك).

حيث $N(p)$ مسوي p في G. لذا إذا كانت $|N(p)| = m$، فإن $n = mr$

وهذا يعني أن $r|n$ (r تُقسم n).

تعريف (7-6)

يقال للزمرة G بأنها زمرة بسيطة إذا لم تحتوي G على زمرة جزئية سوية عدا $\{1\}$ و G.

مثال (6)

لا توجد زمرة بسيطة رتبتها 30.

لتكن $|G| = 30$

إذن $|G| = 2.3.5$

عليه فإن G تحتوي على 6 زمر جزئية سيلوفية من النمط -5.

إذن عدد العناصر في هذه الزمر الجزئية هو:

$6 \times 4 = 24$ عنصر رتبة كل عنصر هي خمسة (ملاحظة: العنصر المحايد مشترك بين جميع هذه الزمر الجزئية).

G أيضاً تحتوي على 10 زمر جزئية سيلوفية من النمط -3، أي أن G تحتوي على $10 \times 2 = 20$ عنصر رتبة كل منها 3.

كذلك G تحتوي على 15 زمرة جزئية سيلوفية من النمط -2.

إذن G تحتوي 15 عنصر رتبة كل عنصر 2.

عليه فإن مجموع العناصر في G يصبح:

$$1 + 24 + 20 + 15 = 60$$

وهذا تناقض لأن رتبة G هي 30.

مثال (7)

لا توجد زمرة بسيطة رتبتها 200.

لما كانت $|G| = 200$ فإن $|G| = 5^2.8$

إذن G تحتوي على r_5 من الزمر الجزئية السيلوفية من النمط -5 رتبة كل منها 25، بحيث $(r_5, 5) = 1$

عليه فإن $r^5|8$ وهذا تناقض إلا إذا كانت $k = 0$.

إذن تحتوي G على زمرة بسيطة واحدة رتبتها 25، وهذا يعني أن G ليست بسيطة.

تمارين محلولة

1. لتكن $|G| = 42$ فإن G زمرة بسيطة .

البرهان :

بواسطة مبرهنة سيلو الثالثة فإن عدد زمر سيلو من النمط -7 هو $r_7 = 1+7k$ وأن $r_7 | 42$ ، أي أن k=0.

إذن G تحتوى على زمرة سيلو من النمط -7 واحدة فقط نسميها H وهذا يعني أن H سوية في G.

2. أوجد أحد الزمر الجزئية السيلوفيه من النمط -2 في S_4. كم عدد زمر سيلو من النمط -2.

البرهان :

الترتيبات $x = (1234)$ و $y = (24)$ تولد زمرة رتبتها 8 وهي:

$$\{1,(1234),(1432),(24),(13),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$$

هذه الزمرة هي زمرة سيلو من النمط -2 في S_4 ويمكن كتابتها بالشكل المبسط الآتي: $\langle x, y : x^4 = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$

أنظر الفصل 2 بند 5.

3. نفرض G زمرة رتبتها P^2q حيث p وq أعداد أولية و q أصغر من p وليست q احد عوامل $p^2 - 1$ فإن G أبيلية.

البرهان:

من مبرهنات سيلو توجد $r_p = 1+pk$ من زمر سيلو من النمط -p وأن $r_p | p^2q$. لذا $r_p | q$ وهذا يعني أن $k = 0$. كذلك توجد $r_q = 1+qh$ من زمر سيلو من

النمط -q و $r_q \mid p^2q$ أي أن $r_q \mid p^2$، ما عدا $h=0$ فإن $1+qh$ أما تساوي p أو p^2 وفي كلتا الحالتين $q=p^2-1$ وهذا مستبعد .

لذا فإن $G=H\times K$ حيث $|H|=p^2$ و $|K|=q$. لكن كل من H وK زمرة ابيلية.

إذن G ابيلية.

4. اوجد زمر سيلو من النمط -2 و3 في الزمرة S_3 مستخدماً طريقة مبرهنة (6-6)

البرهان:

من مبرهنة (6-6)

$R_p=1+pk$ حيث r_p تُقسم رتبة S_3 وأن $k\geq 0$ ، $k\in z$.

a. عندما $k=0$ فإن $r_2=1$ وواحد يُقسم 6. إذاً توجد على الأقل زمرة سيلو واحدة من النمط -2 في S_3.

b. عندما $k=1$ فإن $r_2=1+2.1$ بمعنى أن $r_2=3$، واضح أن 3 تُقسم 6.

إذاً توجد 3 زمر سيلو من النمط -2 في S_3.

لبرهان أنه لا توجد أكثر من 3 نستمر بالطريقة ونحصل على تناقض.

c. عندما $k=2$ فإن $r_2=1+2.2$ أي أن $r_2=5$ وواضح من ذلك أن 5 لا تُقسم 6، وبالاستمرار بنفس الأسلوب سنحصل على r_2 لا تُقسم على S_3 لكل $k\geq 2$.

تمرين

أوجد زمر سيلو من النمط -3 في S_3

تمارين الفصل السادس

5. برهن أن A_4 تحتوي على زمرة سيلوفية واحدة رتبتها 2^2 وكذلك تحتوي على أربعة زمر سيلوفية من النمط -3.

6. كم عدد الزمر السيلوفية من النمط -2 في S_4. أوجد واحدة منها.

7. برهن أنه لا توجد زمرة بسيطة رتبتها 56.

8. أعطي مثالاً على زمرة رتبتها 24 لا تحتوي بداخلها على زمرة سوية رتبتها 8.

9. أوجد الزمر السيلوفية من النمط - 2 و3 في الزمر S_3 و S_4.

المصطلحات العلمية

Abelian group	زمرة ابيلية
Alternating group	زمرة متذبذبة
Asspcoatove	تجميمي
Automorphism	تشاكل تقابلي ذاتي
Centre	مركز
Centralizer	ممركز
Characterostic	مميز
Commutative	ابدالية
Congruence	تطابق
Conjugate	مرافق
Conjugacy classes	صفوف الترافق
Corollary	نتيجة
Coset	مجموعة مشاركة
Cycle	دورة
Cyclic group	زمرة دورية
Closure	انغلاق
Degree	درجة
Direct product	ضرب مباشر
Divisor	قاسم

Devived group	زمرة مشتقة
Equivalence classes	صفوف التكافؤ
Equivalence velation	علاقة تكافؤ
Even	زوجي
Finite	منته
Field	حقل
Generators	مولدات
Group	زمرة
Group of residues	زمرة البواقي
Homomorphism	تشاكل
Identity	محايد
Indcx	دليل
Infinite	غير منتهي
Isomorphism	تشاكل تقابلي
Inverse	معكوس
Imprimitive	غير بدائي
Image	صورة
kernel	نواة
Maximal subgroup	زمرة جزئية عظمى
Normal	سوي
Normalizer	مسوي
Permutation	ترتيبة (تبديلة)
Prime	أولي

Primitive	بدائي
Quotient group	زمرة القسمة (كسرية)
Residue classes	صفوف البواقي
Stabilizer	مثبت
Simple group	زمرة بسيطة
Subgroup	زمرة جزئية
Symmetric group	زمرة تناظر
Soluble	محلولة
Transposion	ترتيب ثنائي
Transitive group	الزمرة المتعدية

المراجع

1. الدكتور جلال نعوم كساب ، الدكتور مصطفى أحمد سلمان ، "مقدمة في الجبر الحديث" دار الكندي، اربد 1995م.
2. د. رمضان محمد جهيمة ،د. علي محمد صقر، "الجبر المجرد" دار الكتاب الجديد، ليبيا 2000م.
3. Allenby, R. "Rings, Fields and groups, Edward Arnold, 1985.
4. Aschbacher, M. "finite Group Theory" Cambridge University Press, 1986.
5. Gorenstein, D. " Finite Groups" Harper and Row , London, 1968.
6. Ledermann, W. "Introduction to Group Thery" Longman, 1979.
7. Weyl, H. "The classical Groups." Princeton University press, Princeton, 1997.

د. علي حسن الجاسم التميمي

- ولد عام 1945 في قرية العواشق المقدادية – العراق.
- حاصل على شهادة الثانوية عام 1963. من ثانوية المقدادية للبنين.
- حاصل على شهادة البكالوريوس عام 1967 من جامعة بغداد – كلية العلوم.
- عمل مدرساً ومعاون مدير عام تربية ديالي
- حاصل على شهادة الماجستير – جبر حديث من جامعة برمنكهام - بريطانيا عام 1975 وشهادة الدكتوراه من جامعة برمنكهام عام 1978.
- عمل في الجامعات السليمانية اربيل في العراق، جامعة وهران – الجزائر، المعهد العالي للمدرسين – غريان – ليبيا، جامعة الحديدة اليمن، جامعة صنعاء اليمن – الجامعة المستنصرية – العراق.
- أمين سر جمعية الفيزيايون والرياضياتيون بغداد.
- أمين صندوق مجلة علوم المستنصرية.
- رئيس اللجنة الوطنية للرياضيات في العراق.
- تبوء مراكز إدارية عديدة في الجامعات العراقية.
- ألف عديد من الكتب العلمية في حقل الرياضيات.
- له بحوث كثيرة في حقل الرياضيات – جبر حديث.
- مشرف على طلبة ماجستير ودكتوراه عديدون.
- عمل في جميع الفعاليات الخاصة بعلم الرياضيات داخل وخارج العراق.


دار
المسيرة
للنشر والتوزيع والطباعة


دار
المسيرة
للنشر والتوزيع والطباعة